1 Pentagone régulier

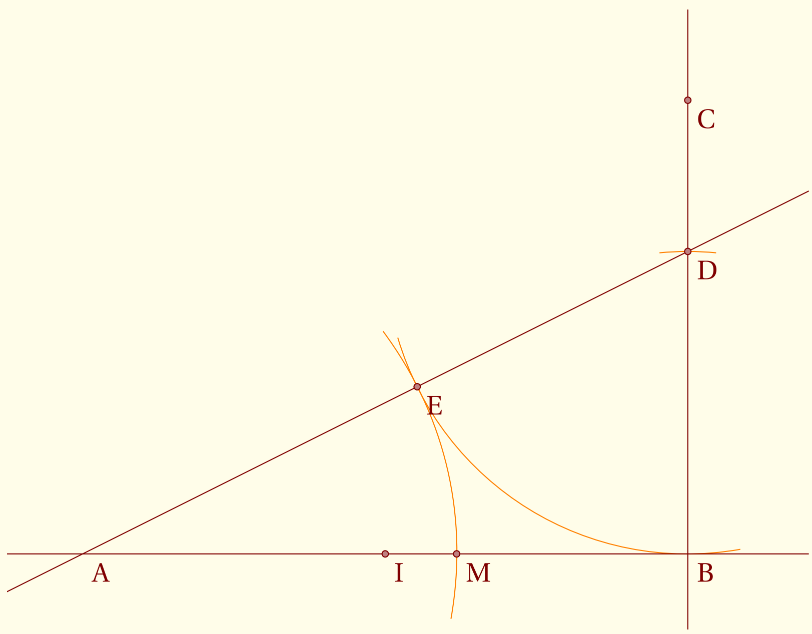
Euclide construit un pentagone régulier (équilatéral et équiangle) inscrit dans un cercle. Son élément de base est le triangle d'or : un triangle isocèle dont les angles avec la base sont double de l'angle au sommet (et ainsi l'angle au sommet est le 5e de l'angle plat). 180/5=36

1.1 La proportion d'or - l'équerre 1/2

[AB] un segment.

1. Placer I, le milieu, le milieu de [AB]
2. Tracer la perpendiculaire en B à (AB)
3. Tracer l'arc de cercle de centre B de rayon BI = AB / 2, qui coupe [By) en C
4. Tracer le segment [AC]
5. Tracer l'arc de cercle de centre C de rayon CB, qui coupe [AC] en D
6. Tracer l'arc de cercle de centre A de rayon AD, qui coupe [AB] en M

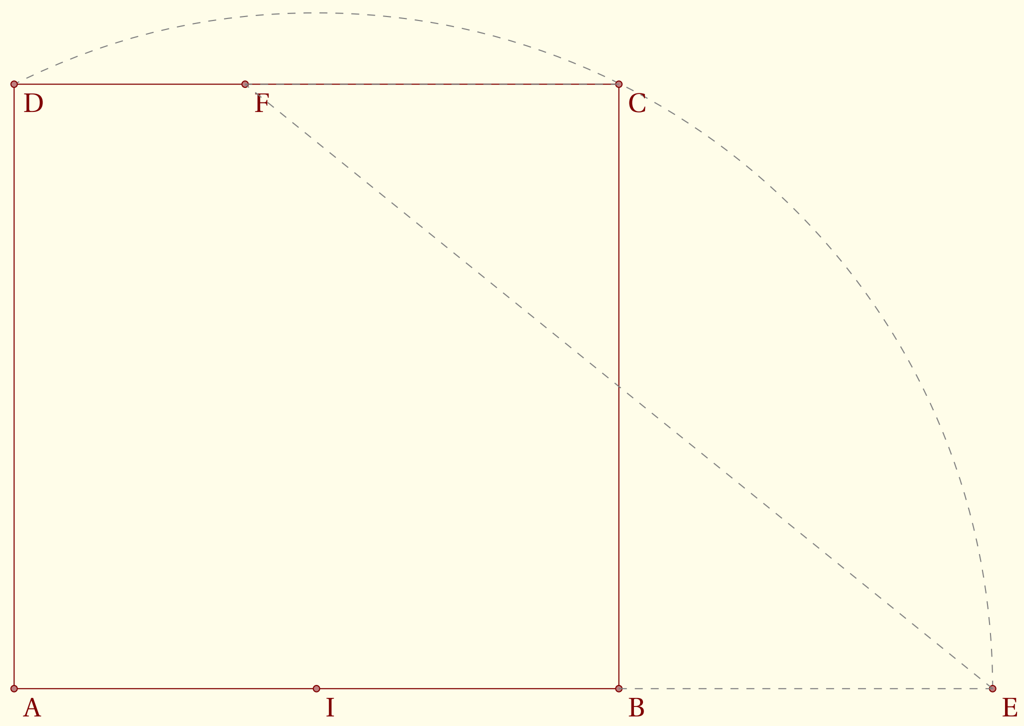
$$\frac{AM}{MB} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



1.2 La proportion d'or - le rectangle d'or

- AB=1
- I milieu de [AB]
- CF=EB

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



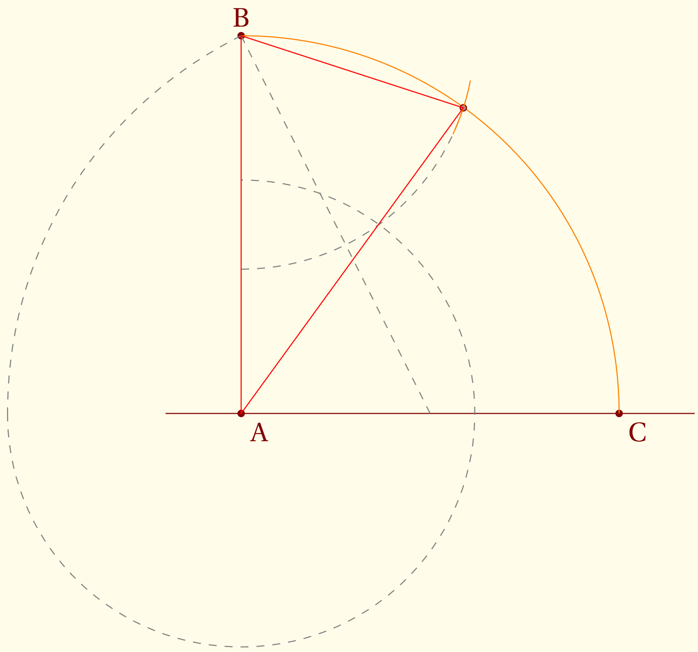
1.3 Construction du triangle d'or

Dans la figure jointe, I est le milieu de [AC], AC = AB, IB = ID, AD = AE = BF. Euclide démontre que le triangle ABF est un triangle d'or en utilisant des propriétés assez longues. (wikipedia)
De nos jours, la démonstration est plus simple car si on note AC = 1, on obtient

$$\mathrm{IB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

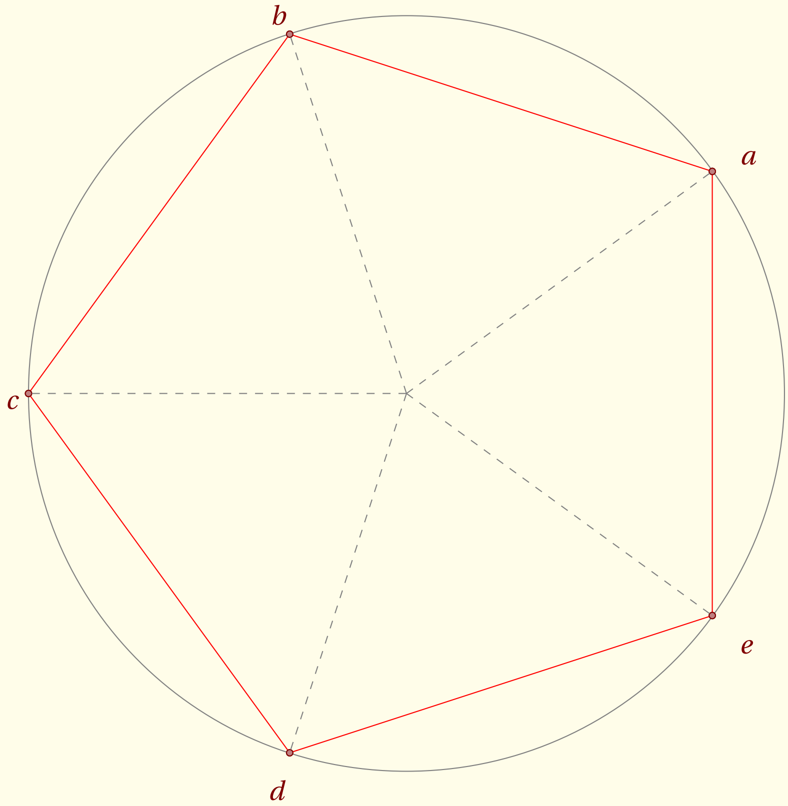
$$\mathrm{AD} = \mathrm{AE} = \mathrm{BF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

grâce au théorème de Pythagore où est le nombre d'or Les dimensions du triangle ABF sont donc 1 ; 1 et $\frac{1}{\Phi}$. C'est bien un triangle d'or.

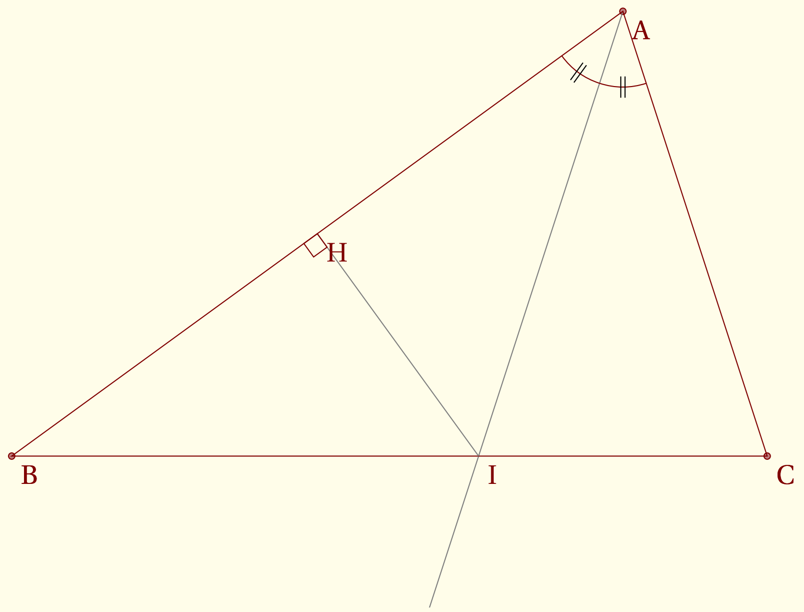


1.4 Construction du pentagone

Euclide prouve qu'il peut construire un triangle d'or dans un cercle. À partir du triangle d'or OA'C construire le triangle d'or CDA grâce à l'arc de cercle de centre A' et de rayon A'C En prenant les bissectrices des angles C et D en les prolongeant jusqu'au cercle, il obtient les deux sommets B et E manquant.



1.5 Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\pi\right)$



Soit un triangle d'or ABC ayant pour base [AC]

* BA=BC
* $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{5}$
* [AI) bissectrice de $\widehat{BAC}$
* AC = 1

On montre alors que :

* AC = AI = BI = 1
* $BA = 2BH = 2\cos(\frac{\pi}{5})$
* $IC = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$
* $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{IC}{AC}$ donc $IC = \dfrac{1}{2\cos(\frac{\pi}{5})}$

Les deux dernières égalités donnent

$$\left(2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\left(2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1\right) = 1$$

c'est à dire

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

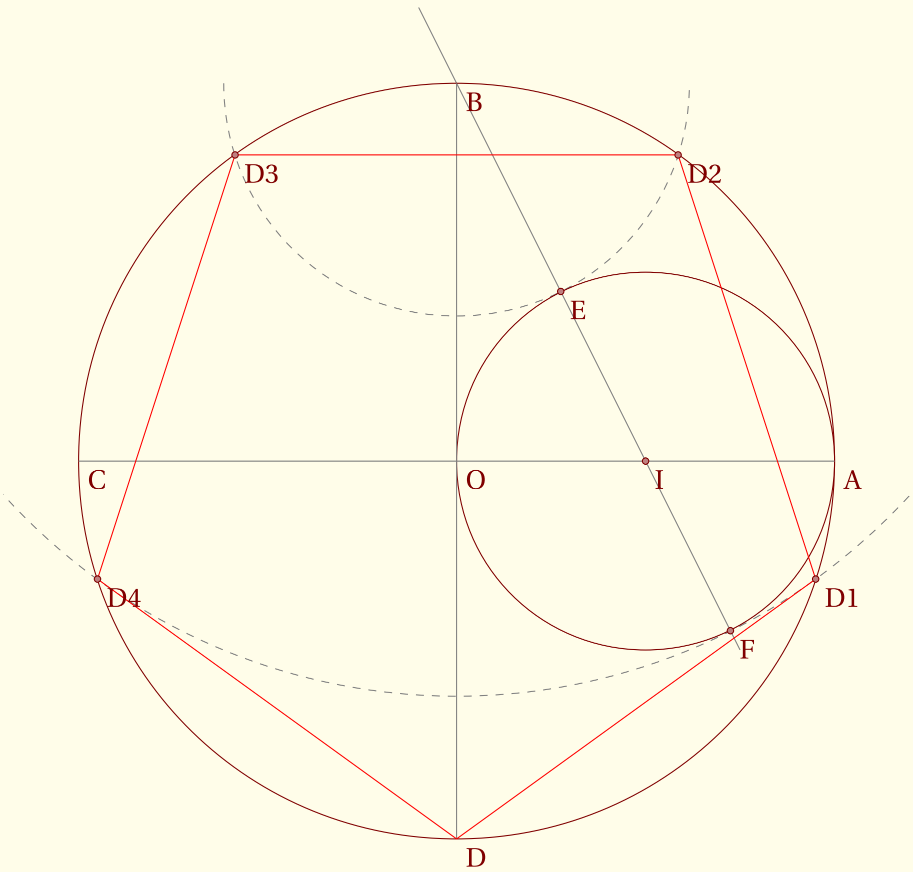
Si on pose $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = x$, la solution positive de l' équation $4x^2 - 2x + 1 = 0$ est

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}.$$

1.6 Pentagone inscrit dans un cercle

On peut grandement simplifier la construction d'Euclide en conservant le même principe : construire des triangles d'or ou d'argent.

1. Tracer un cercle Γ de centre O et de rayon R (unité quelconque)
2. Tracer 2 diamètres perpendiculaires
   - les jonctions à Γ formant les point A, B, C, D
   - A étant diamétralement opposé à C
   - B étant diamétralement opposé à D
   - Tracer un cercle Γ′ de diamètre [OA] (rayon R' = R/2) et de centre I. cercle Γ′ passe donc en O et A.
   - Tracer une droite (d) passant par B et I, (d) intercepte cercle Γ′ en E et F (E est le plus proche de B)
   - Tracer 2 (arc de) cercles Γ1 et Γ2 de centre B et de rayons (respectivement) BE et BF Γ1 et Γ2 interceptent Γ en 4 pts (D1, D2, D3, D4)
   - D, D1, D2, D3, D4 forment un pentagone régulier En effet, on vérifie que BOD2 est un triangle d'or, BOD1 un triangle d'argent (leurs bases valent respectivement et alors que leurs côtés valent R).



1.7 Pentagone inscrit dans un cercle inscrit dans un carré.