Règle et Compas

AlterMundus

Exemples de constructions à la règle et au compas

Alain Matthes

28 août 2010

http://altermundus.com

AlterMundus

Alain Matthes

tkz-euclide

*Ce petit traité de géométrie à la règle et au compas donne une série d'exemples d'utilisation du package **`tkz-euclide`**. Différents thèmes sont abordés comme la géométrie sacrée, ou bien encore les nombres constructibles mais tout ceci est en version beta. Ce ne sont actuellement que des tests pour verifier les possibiltés de **`tkz-euclide`***

[petit traité de géométrie v1.1 2010/03/22]

☞ Je remercie évidemment **Till Tantau** pour la création de Ti*k*Z, sans lequel tkz-eucilde n'existerait pas.

☞ Je remercie également **Yves Combes** pour l'apport d'exemples et pour la correction de plusieurs macros.

☞ Je remercie **Mark Wibrow** et **Christian Feuersänger** pour l'apport d'exemples et leur aide sur **`pgfkeys`**.

☞ Des remerciements également à **Jacques Yves André** pour son aide sur les fontes et à **Stéphane Pasquet** pour ses corrections.

☞ Parmi les différentes sources que j'ai utilisées, il faut citer en premier « PRATIQUE DU COMPAS » de Zacharie. J'ai utilisé l'excellent document de **Pierre Fournier** que l'on trouve sur le site Syracuse `http://melusine.eu.org/syracuse/metapost/compas.pdf`.

Table des matières

SECTION 1

Notations

Voici les objets les plus courants avec leur notation et la façon de les constuire avec **tkz-euclide**.

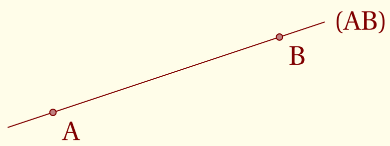
1.1 Les points

Un point est représenté géométriquement par un petit disque ou une croix et est désigné par une lettre majuscule (sauf pour les points de constructions).

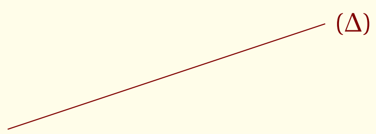
```
\begin{tikzpicture}
    \tkzDefPoint(0,0){A}
    \tkzDefPoint(5,1){B}
    \tkzDrawPoint(A)
    \tkzDrawPoint[shape=cross out,%
    size=8](B)
\end{tikzpicture}
```

1.2 Les droites

Une droite est définie par deux points et est notée (AB).



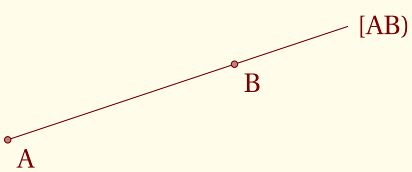

```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,1){A}
  \tkzDefPoint(3,2){B}
  \tkzDrawLine[end=$(AB)$](A,B)
  \tkzDrawPoints(A,B)
  \tkzLabelPoints(A,B)
\end{tikzpicture}
```




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,1){A}
  \tkzDefPoint(3,2){B}
  \tkzDrawLine[end=$(\Delta)$](A,B)
\end{tikzpicture}
```

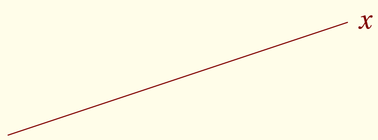
1.3 Les demi-droites

Une demi-droite définie par deux points est notée [AB).




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,1){A}
  \tkzDefPoint(3,2){B}
  \tkzDrawLine[add = 0 and  .5,end=$[AB)$](A,B)
  \tkzDrawPoints(A,B)
  \tkzLabelPoints(A,B)
\end{tikzpicture}
```

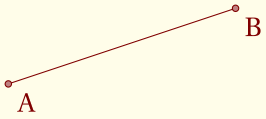
Autre notation




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,1){A}
  \tkzDefPoint(3,2){B}
  \tkzDrawLine[add = 0 and .5,end=$x$](A,B)
\end{tikzpicture}
```

1.4 Les segments

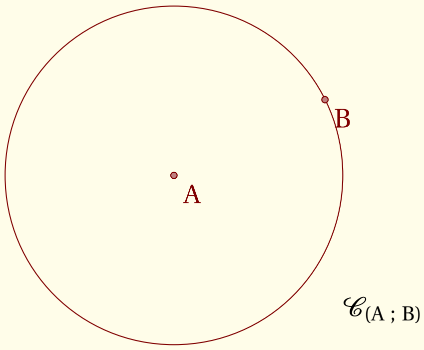
Un segment est défini par deux points et est noté [AB]




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,1){A}
  \tkzDefPoint(3,2){B}
  \tkzDrawSegment(A,B)
  \tkzDrawPoints(A,B)
  \tkzLabelPoints(A,B)
\end{tikzpicture}
```

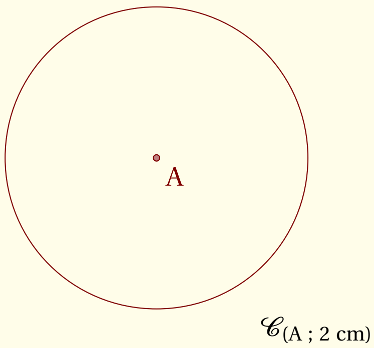
1.5 Les cercles

centre A passant par B : $\mathcal{C}_{(A\,;\,B)}$




```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,1){A}
  \tkzDefPoint(2,2){B}
  \tkzDrawCircle(A,B)
  \tkzDrawPoints(A,B)
  \tkzLabelPoints(A,B)
  \tkzLabelCircle[below right=10pt](A,B)(-60)%
      {$\mathcal{C}_{(A~;~B)}$}
\end{tikzpicture}
```

centre A rayon 2cm : $\mathcal{C}_{(A\,;\,2\text{ cm})}$

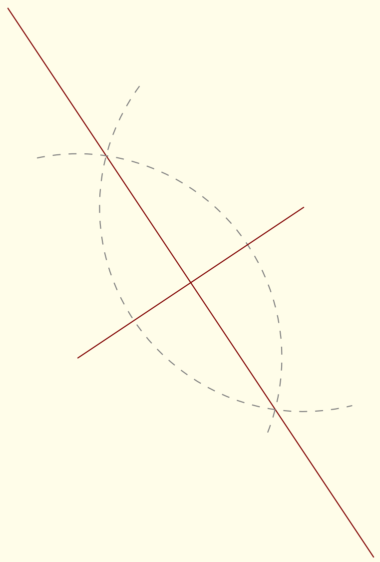



```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,1){A}

  \tkzDrawCircle[R](A,2 cm)
  \tkzDrawPoint(A)
  \tkzLabelPoints(A)
  \tkzLabelCircle[R,below right=10pt](A,2 cm)(-60)%
     {$\mathcal{C}_{(A~;~2\ \text{cm})}$}
\end{tikzpicture}
```

SECTION 2

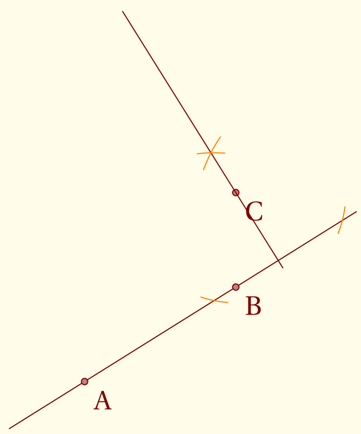
Quelques constructions classiques

2.1 Diviser un segment en deux parties égales



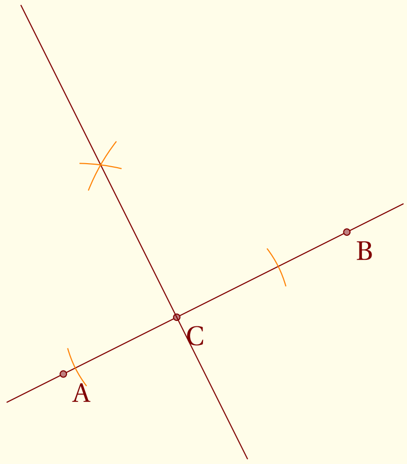
```
\begin{tikzpicture}
   \tkzInit
   \tkzDefPoint(0,0){A}
   \tkzDefPoint(3,2){B}
   \tkzDefLine[mediator](A,B)
   \tkzDrawLine(tkzFirstPointResult,tkzSecondPointResult)
   \tkzCalcLength[cm](A,B)% pas besoin de stocker le résultat
   \tkzFindSlopeAngle(A,B)% pas besoin de stocker le résultat
   \begin{scope}[rotate=\tkzAngleResult]
     \tikzset{arc/.style={color=gray,style=dashed,delta=10}}
     \tkzDrawArc[R,arc=ll](B,3/4*\tkzLengthResult)(120,240)
     \tkzDrawArc[R,arc=ll](A,3/4*\tkzLengthResult)(-45,60)
     \tkzDrawSegment(A,B)
    \end{scope}
\end{tikzpicture}
```

2.2 Du point C abaisser une perpendiculaire sur la droite (AB)



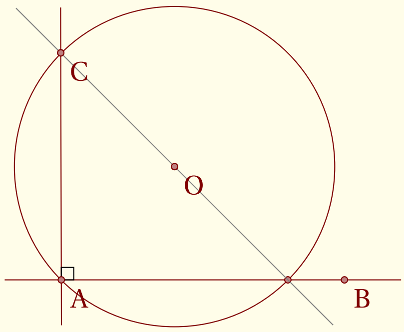

```
\begin{tikzpicture}[scale=.5]
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(4,2.5){B}
  \tkzDefPoint(4,5){C}
  \tkzDrawLine[add= .5 and .8](A,B)
  \tkzDrawPoints(A,B,C)\tkzLabelPoints(A,B,C)
  \tkzDefLine[orthogonal=through C](A,B)
  \tkzDrawLine[add = .5 and .2](C,tkzPointResult)
  \tkzShowLine[orthogonal=through C,size=2,%
   color=orange,gap=3](A,B)
\end{tikzpicture}
```

2.3 Étant donnée la droite (AB), sur laquelle on veut élever une perpendiculaire



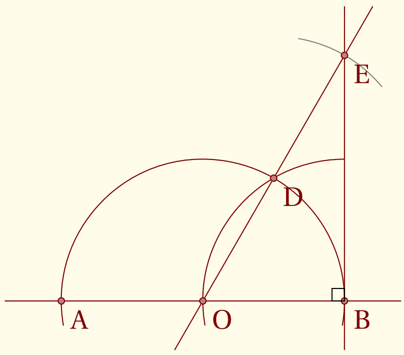

```
\begin{tikzpicture}[scale=.75]
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(5,2.5){B}
  \tkzDefPoint(2,1){C}
  \tkzDrawLine(A,B)
  \tkzDrawPoints(A,B,C)  \tkzLabelPoints(A,B,C)
  \tkzDefLine[orthogonal=through C](A,B)
  \tkzDrawLine[add = .5 and .1](C,tkzPointResult)
  \tkzShowLine[orthogonal=through C,%
             size=2,color=orange,gap=3](A,B)
\end{tikzpicture}
```

2.4 Sur la droite (AB) élever la perpendiculaire (AC) au point A




```
\begin{tikzpicture}[scale=.75]
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(5,0){B}
  \tkzDefPoint(2,2){O}
  \tkzDrawLine(A,B)
  \tkzDrawCircle(O,A)
  \tkzInterLC(A,B)(O,A)\tkzGetSecondPoint{D}
  \tkzInterLC(D,O)(O,A)\tkzGetSecondPoint{C}
  \tkzDrawPoint(D)
  \tkzDrawPoint(C)
  \tkzDrawLine[color=gray,add=1.4 and .4](O,D)
  \tkzDrawLine(A,C)
  \tkzMarkRightAngle(B,A,C)
  \tkzDrawPoints(A,B,O,C)  \tkzLabelPoints(A,B,O,C)

\end{tikzpicture}
```

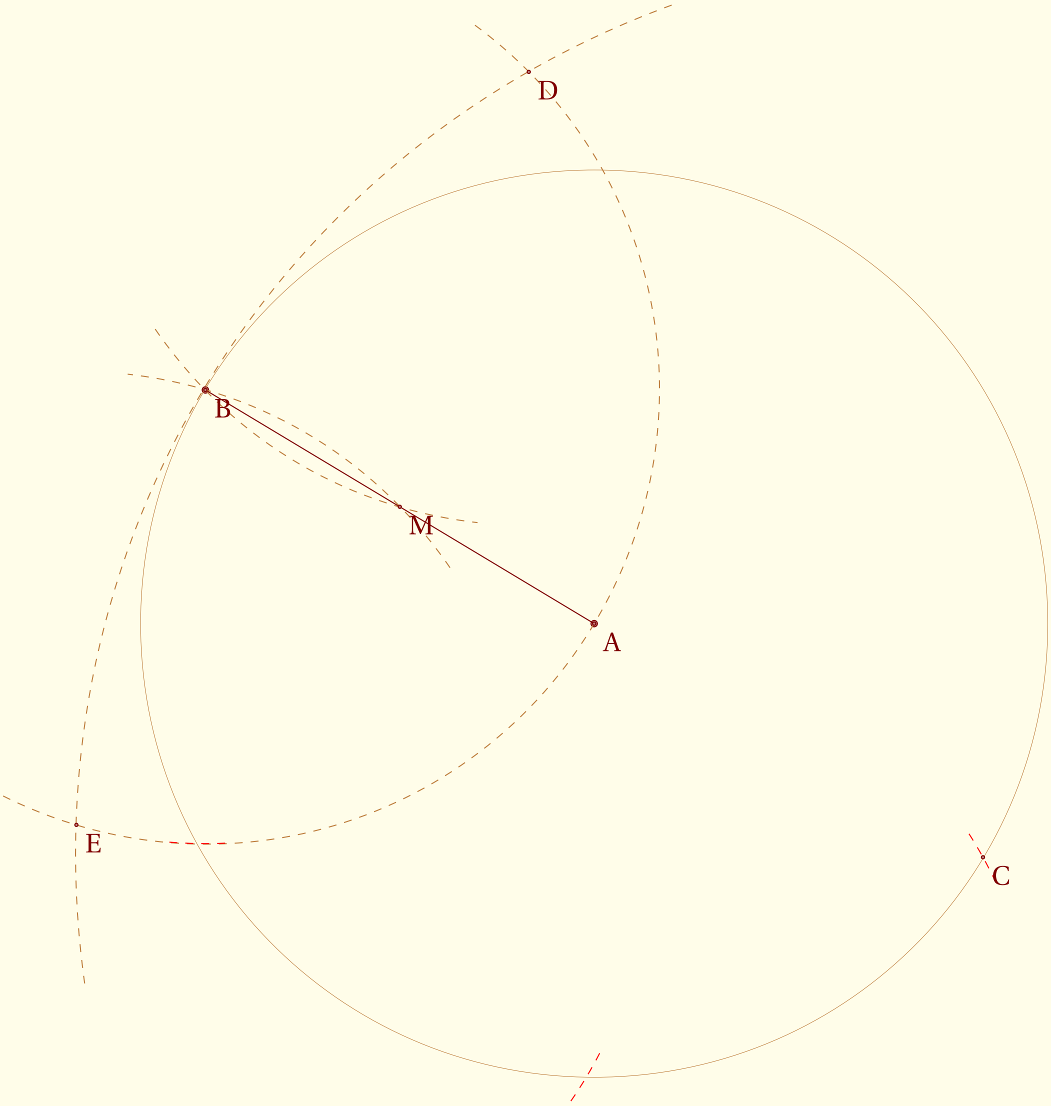
2.5 Autre méthode pour le même problème




```
\begin{tikzpicture}[scale=.75]
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(5,0){B}
  \tkzDefPoint(2.5,0){O}
  \tkzDefPointBy[rotation=center O angle 60](B)\tkzGetPoint{D}
  \tkzDefPointBy[symmetry=center D](O)\tkzGetPoint{E}
  \tkzSetUpLine[color=Maroon]
  \tkzDrawArc[angles,color=Maroon,delta=10](O,B)(0,180)
  \tkzDrawArc[angles,color=Maroon,delta=10](B,O)(100,180)
  \tkzCompass[color=gray,delta=20](D,E)
  \tkzDrawLines(A,B O,E B,E)
  \tkzDrawPoints(A,B,O,D,E)
  \tkzLabelPoints(A,B,O,D,E)
  \tkzMarkRightAngle(O,B,E)
\end{tikzpicture}
```

2.6 Milieu d'un segment au compas

M milieu de [AB]

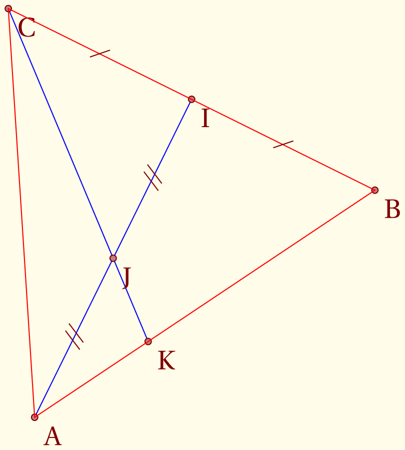



```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzGetRandPointOn[circle= center A radius 6cm]{B}
  \tkzDrawPoints(A,B)
  \tkzDefPointBy[rotation= center A angle 180](B)\tkzGetPoint{C}
  \tkzInterCC[R](A,6 cm)(B,6 cm)\tkzGetPoints{I}{I'}
  \tkzInterCC[R](A,6 cm)(I,6 cm)\tkzGetPoints{J}{B}
  \tkzInterCC(B,A)(C,B)\tkzGetPoints{D}{E}
  \tkzInterCC(D,B)(E,B)\tkzGetPoints{M}{M'}
   \tkzDrawSegment(A,B)
  \tikzset{arc/.style={color=brown,style=dashed,delta=10}}
  \tkzDrawArc[arc](C,D)(E)
  \tkzDrawArc[arc](B,E)(D)
  \tkzDrawCircle[color=brown,line width=.2pt](A,B)
  \tkzDrawArc[arc](D,B)(M)
  \tkzDrawArc[arc](E,M)(B)
  \tkzCompasss[color=red,style=dashed](B,I I,J J,C)
  \tkzDrawPoints(A,B,C,D,E,M) \tkzLabelPoints(A,B,C,D,E,M)
 \end{tikzpicture}
```

2.7 Trisection d'un segment

2.7.1 méthode 1

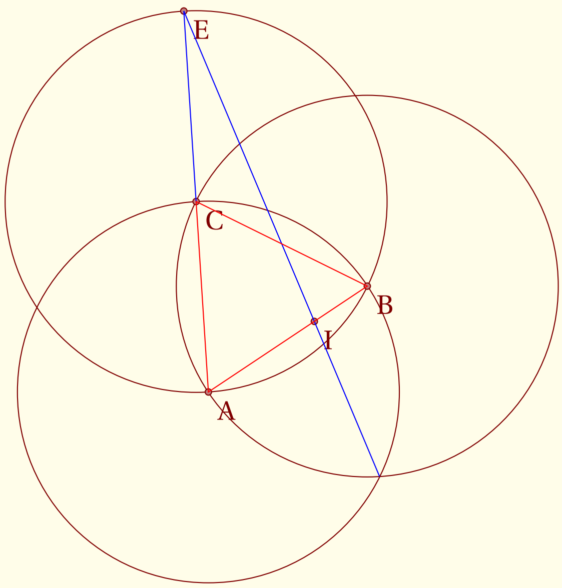
$$AK = \frac{1}{3}AB$$




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
   \tkzDefPoint(0,0){A}
   \tkzDefPoint(3,2){B}
   \tkzDefTriangle[equilateral](A,B)
   \tkzGetPoint{C}
   \tkzDefMidPoint(C,B) \tkzGetPoint{I}
   \tkzDefMidPoint(A,I) \tkzGetPoint{J}
   \tkzInterLL(C,J)(A,B)\tkzGetPoint{K}
   \tkzDrawSegments[color=blue](C,K A,I)
   \tkzDrawPoints(A,B,C,J,I,K)
   \tkzLabelPoints(A,B,C,J,I,K)
   \tkzDrawPolygon[red](A,B,C)
   \tkzMarkSegments[mark=s|](C,I I,B)
   \tkzMarkSegments[mark=s||](A,J J,I)
\end{tikzpicture}
```

2.7.2 méthode 2

$$BI = \frac{1}{3}AB$$

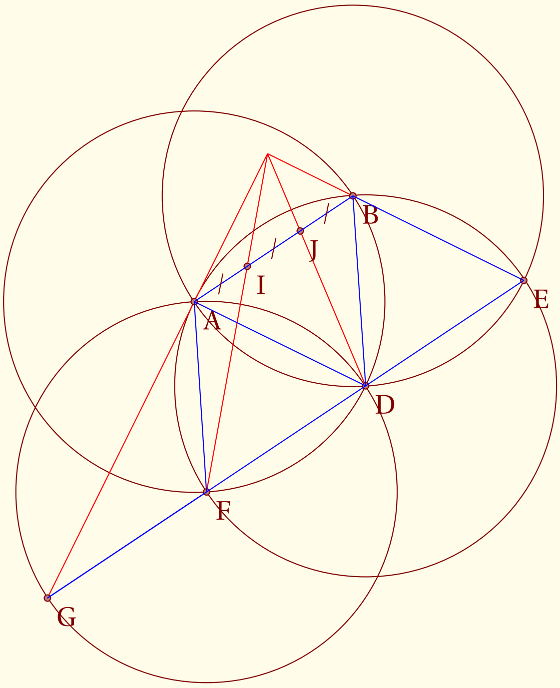



```
\begin{tikzpicture}[scale=.7]
 \tkzDefPoint(0,0){A}
 \tkzDefPoint(3,2){B}
 \tkzInterCC(A,B)(B,A)
   \tkzGetPoints{C}{D}
 \tkzInterLC(A,C)(C,A)
   \tkzGetSecondPoint{E}
 \tkzInterLL(D,E)(A,B)
   \tkzGetPoint{I}
 \tkzDrawCircle(C,A)
 \tkzDrawCircle(A,B)
 \tkzDrawCircle(B,A)
 \tkzDrawPoints(A,B,C,E,I)
 \tkzLabelPoints(A,B,C,E,I)
 \tkzDrawSegments[blue](D,E C,E)
 \tkzDrawPolygon[red](A,B,C)
\end{tikzpicture}
```

2.7.3 méthode 3

$$AI = \frac{1}{3}AB$$

Cette méthode complète la méthode 1.



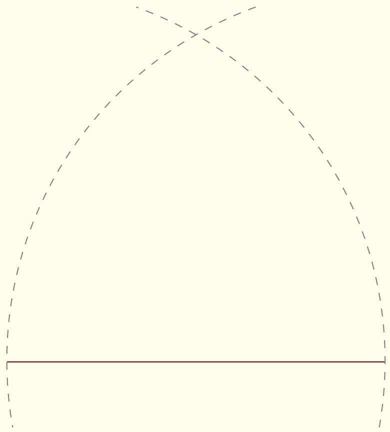

```
  \begin{tikzpicture}[scale=.7]
   \tkzDefPoint(0,0){A}
   \tkzDefPoint(3,2){B}
   \tkzInterCC(A,B)(B,A)
   \tkzGetPoints{C}{D}
   \tkzInterCC(D,B)(B,A)
   \tkzGetPoints{A}{E}
   \tkzInterCC(D,B)(A,B)
   \tkzGetPoints{F}{B}
   \tkzInterLC(E,F)(F,A)
   \tkzGetPoints{D}{G}
   \tkzInterLL(A,G)(B,E)
   \tkzGetPoint{O}
   \tkzInterLL(O,D)(A,B)
   \tkzGetPoint{J}
   \tkzInterLL(O,F)(A,B)
   \tkzGetPoint{I}
   \tkzDrawCircle(D,A)
   \tkzDrawCircle(A,B)
   \tkzDrawCircle(B,A)
   \tkzDrawCircle(F,A)
   \tkzDrawSegments[color=red](O,G O,B%
         O,D O,F)
   \tkzDrawPoints(A,B,D,E,F,G,I,J)
   \tkzLabelPoints(A,B,D,E,F,G,I,J)
   \tkzDrawSegments[blue](A,B B,D A,D%
        A,F F,G E,G B,E)
   \tkzMarkSegments[mark=s|](A,I I,J J,B)
\end{tikzpicture}
```

SECTION 3

Les triangles

3.1 Triangle équilatéral

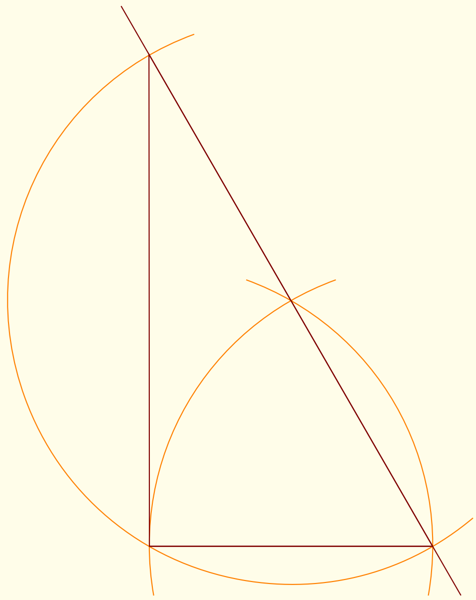
Pas de difficultés particulières :



```
\begin{tikzpicture}
  \tkzInit
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(5,0){B}
  \tkzDrawSegment(A,B)
  \tkzDefPointBy[rotation=center A angle 60](B)
  \tkzDrawArc[color=gray,%
            style=dashed,%
            delta=10](A,B)(tkzPointResult)
  \tkzDrawArc[color=gray,%
        style=dashed,delta=10](B,tkzPointResult)(A)
\end{tikzpicture}
```

3.2 Triangle scolaire

Il s'agit d'un triangle rectangle ayant un angle de 60 degrés. Il suffit de tracer un triangle équilatéral puis en un point d'élever une perpendiculaire. Afin de minimiser les étapes, il suffit de construire le symétrique d'un des sommets du triangle par rapport à au autre sommet



```
\begin{tikzpicture}[scale=.75]
  \tkzInit
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(5,0){B}
  \tkzDrawSegment(A,B)
  \tkzDefPointBy[rotation=center A angle 60](B)
   \tkzGetPoint{O}
  \tkzDrawArc[color=orange,delta=10](A,B)(O)
  \tkzDrawArc[color=orange,delta=10](B,O)(A)
  \tkzDrawArc[rotate,color=orange,delta=10](O,B)(-180)
  \tkzDrawLine[add=.2 and 1.2](B,O)
  \tkzInterLC(B,O)(O,B)\tkzGetSecondPoint{C}
  \tkzDrawPolygon(A,B,C)
\end{tikzpicture}
```

SECTION 4

Les tangentes

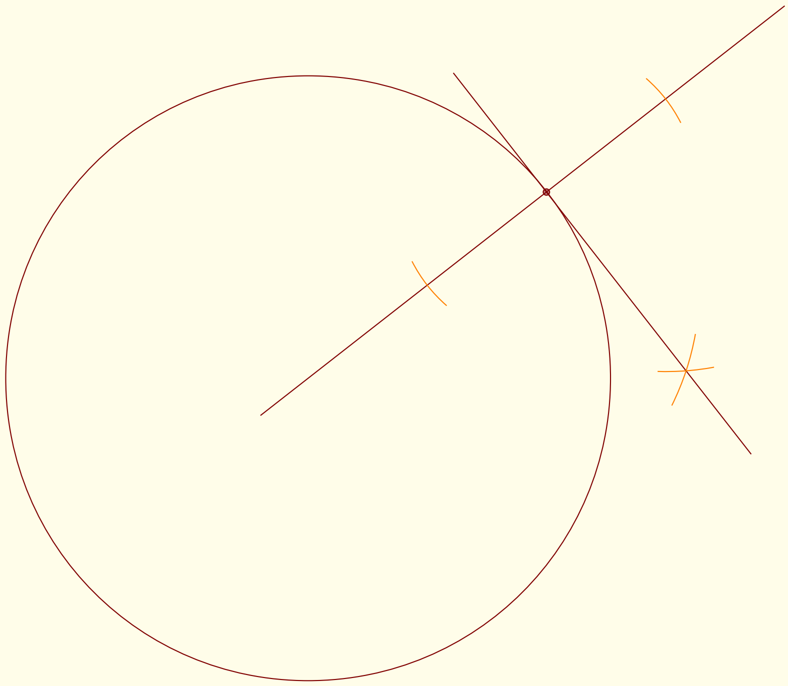
?

4.1 D'un point C on veut mener une tangente à un cercle donné

Du centre A du cercle donné, tracez la droite (AC), divisez le segment [AC] en deux parties égales. Du point D milieu de [AC] pris pour centre et DC pour rayon, décrivez une circonférence qui coupera le cercle donné aux points E et F ; cela fait, tracez les droites (CE) et (CF) : elles seront tangentes au cercle donné, qui ne les touchera chacune qu'en un seul point E et F ; lesquelles droites seront perpendiculaires aux rayons [AE] et [AF], car, sans cette condition, elles ne seraient pas tangentes au cercle donné.

4.2 Du point A, pris sur une circonférence d'un cercle, on veut tracer une tangente à ce cercle

Du centre C du cercle donné, tracez le segment [AC] ; ce segment sera un rayon du cercle donné ; à l'extrémité A de ce rayon, élevez une perpendiculaire, par la méthode de la figure 4, telle que la droite (BD) : elle sera tangente au cercle donné, et elle ne le touchera qu'au seul point A.



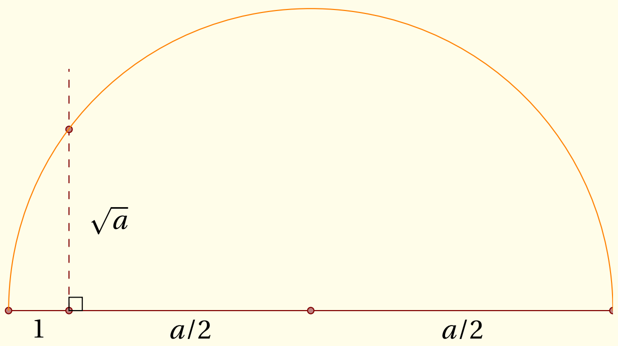
```
\begin{tikzpicture}
  \tkzInit
  \tkzDefPoint(0,0){O}
  \tkzGetRandPointOn[circle=center O radius 4cm]{A}
  \tkzDrawPoint(A)
  \tkzDrawLine[add = .2 and 1](O,A)
  \tkzDrawCircle(O,A)
  \tkzDefLine[orthogonal=through A](A,O)\tkzGetPoint{h}
  \tkzDrawLine[add = .5 and .1](A,h)
  \tkzShowLine[orthogonal=through A,%
     size=2,color=orange,gap=3](A,O)
\end{tikzpicture}
```

SECTION 5

Nombres constructibles

??
Les racines carrées sont donc constructibles.

5.1 Construction de la racine carrée d'un nombre




```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
   \tkzInit[ymin=-1,ymax=6,xmin=-1,xmax=10]
   \tkzClip
   \tkzDefPoint(0,0){O}
   \tkzDefPoint(1,0){I}
   \tkzDefPoint(10,0){A}
   \tkzDefMidPoint(O,A)  \tkzGetPoint{M}
   \tkzDefPointWith[orthogonal](I,M) \tkzGetPoint{H}
   \tkzInterLC(I,H)(M,A)  \tkzGetSecondPoint{B}
   \tkzDrawSegment(O,A)
   \tkzDrawSegment[style=dashed](I,H)
   \tkzDrawPoints(O,I,A,B,M)
   \tkzDrawArc(M,A)(O)
   \tkzMarkRightAngle(A,I,B)
   \tkzLabelSegment[right=4pt](I,B){$\sqrt{a}$}
   \tkzLabelSegment[below](O,I){$1$}
   \tkzLabelSegment[below](I,M){$a/2$}
   \tkzLabelSegment[below](M,A){$a/2$}
\end{tikzpicture}
```

5.2 Résolution d'une équation du second degré

5.2.1 Construction de deux segments connaissant leur somme et leur moyenne géométrique

Connaître la moyenne géométrique signifie connaître le produit des longueurs. Appelons s et g ces deux valeurs ainsi que a et b les deux longueurs des segments. La longueur du segment [AC] ci-dessous est égale à $a+b$, la longueur du segment [AM] est égale à la moyenne géométrique g.
Connaître la moyenne géométrique c'est à dire $g = \sqrt{ab}$, revient à connaître $g^2 = ab$. Pour obtenir g, il suffit de tracer un cercle de diamètre $\mathrm{AC} = s$ et un autre de diamètre $\mathrm{OB} = 1 + g^2$ tel que $\mathrm{OA} = 1$. La tangente en A au premier cercle coupe le second en M tel que $\mathrm{AM} = g = \sqrt{ab}$. La droite passant par M

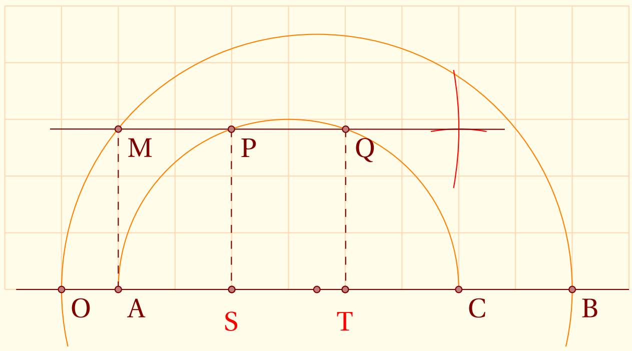
et parallèle à la droite (AC) coupe le cercle de diamètre [AC] sous certaines conditions. Soit P le premier point obtenu alors la hauteur [CS] du triangle rectangle APC vérifie

$$\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{SC}}$$

donc

$$\mathrm{AS} \times \mathrm{SC} = \mathrm{PS}^2 = \mathrm{AM}^2 = g^2 = ab$$

De plus $\mathrm{AS} + \mathrm{SC} = \mathrm{AC} = a + b$
AS et SC (=AT) sont les solutions de l'équation $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.




```
\begin{tikzpicture}[scale=.75]
  \def\mg{8}
  \def\sum{6}
  \tkzInit[xmin = -2,ymin = 0,xmax = 9,ymax = 5]
  \tkzGrid[color=orange!30]
  \tkzClip[space=1]
  \tkzDefPoint(-1,0){O}
  \tkzDefPoint(0,0){A}\tkzDefPoint(8,0){B}
  \tkzDefPoint(3.5,0){E}
  \tkzDefPoint(\sum,0){C}
  \FPeval\sqmg{(\mg)^(0.5)}
  \tkzDefPointWith[orthogonal normed,K=\sqmg](A,C)
  \tkzGetPoint{M}
  \tkzDefLine[parallel=through M](A,C)\tkzGetPoint{Q}

  \tkzDefMidPoint(A,C) \tkzGetPoint{I}
  \tkzInterLC(M,Q)(I,C)\tkzGetPoints{P}{Q}
  \tkzDefPointBy[projection= onto A--C](Q)\tkzGetPoint{Q'}
  \tkzDefPointBy[projection= onto A--C](P)\tkzGetPoint{P'}
  \tkzDrawCircle[R,color=orange](E,4.5 cm)
  \tkzDrawArc(I,C)(A)
  \tkzShowLine[parallel=through M,color=red,delta=10](A,C)
  \tkzDrawLine[add =.3 and .5](A,C)
  \tkzDrawLine[add =.3 and .7](M,Q)
  \tkzDrawSegments[style=dashed](A,M P,P' Q,Q')

  \tkzPoint[pos={below=5pt},namecolor=red](2,0){S}
  \tkzPoint[pos={below=5pt},namecolor=red](4,0){T}
  \tkzDrawPoints(O,A,B,C,E,M,P,Q,S,T)
  \tkzLabelPoints(O,A,B,C,M,P,Q)
\end{tikzpicture}
```

Il est nul besoin de connaître la résolution d'une équation du second degré pour déterminer s_1 et s_2. Deux méthodes sont applicables, la première est basée sur des identités remarquables :

– Supposons $a \geq b$ alors

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

donne $(a-b)^2 = s^2 - 4g^2$ et $a - b = \sqrt{s^2 - 4m^2}$.

Remarque : $s^2 - 4g^2 \geq 0$ revient à écrire

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

a, b étant positifs

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

la moyenne arithmétique est en effet supérieure à la moyenne géométrique. La droite passant par M et parallèle à (AC) coupe bien le cercle [AC].

– La seconde méthode consiste à nommer m la demi-somme de a et b ainsi $m = s/2$, toujours en supposans que supposant $a \geq b$ on peut écrire qu'il existe α tel que $a = m + \alpha$ et $a = m - \alpha$.

La connaissance de g nous invite à écrire le produit de a par b, soit

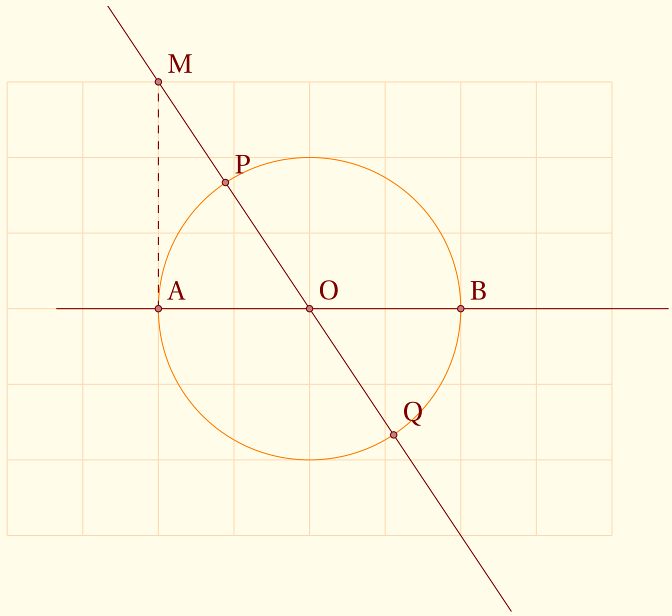
$$g^2 = ab = (m+\alpha)(m-\alpha) = m^2 - \alpha^2$$

ainsi $\alpha^2 = m^2 - g^2$. Nous obtenons finalement

$$\alpha = \sqrt{m^2 - g^2} = \sqrt{\frac{s^2}{4} - g^2}$$

5.2.2 Construction deux segments connaissant leur différence et leur moyenne géométrique

Appelons d et g ces deux valeurs. Les segments [MP] et [MQ], ci-dessous, répondent à la question. En effet, $\mathrm{MQ} - \mathrm{MP} = \mathrm{PQ} = d$ et $\mathrm{MP} \times \mathrm{MQ} = \mathrm{MA}^2 = g^2$



```
\begin{tikzpicture}
  \tkzInit[xmin = -2,ymin = -3,xmax = 6,ymax = 3]
  \tkzGrid[color=orange!30]
  \tkzClip[space=1]
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(4,0){B}
  \tkzDefPoint(0,3){M}

  \tkzDefMidPoint(A,B)   \tkzGetPoint{O}
  \tkzInterLC(M,O)(O,A)  \tkzGetPoints{P}{Q}
  \tkzDefPointBy[projection= onto A--B](Q) \tkzGetPoint{Q'}
  \tkzDefPointBy[projection= onto A--B](P) \tkzGetPoint{P'}

  \tkzDrawCircle[diameter,color=orange](A,B)
  \tkzDrawLine[add =.3 and .5](A,C)
  \tkzDrawLine[add =.3 and .7](M,Q)
  \tkzDrawSegment[style=dashed](A,M)
  \tkzDrawPoints(O,A,B,P,Q,M)
  \tkzLabelPoints[above right](O,A,B,P,Q,M)
\end{tikzpicture}
```

5.2.3 Construction des racines de $x^2 - px + q = 0$

Résolution de l'équation suivante avec $p > 0$ et $q > 0$.
Remarquons que $(x-a)(x-b) = x^2-(a+b)x+ab = 0$ alors en posant $p = a+b$ et $q = ab$, il est possible d'utiliser les constructions précédentes ou bien :

$$x^2 - px + q = 0$$

1. On trace un segment OB tel que OA=1 et AB=q
2. On trace le demi-cercle Γ ayant comme diamètre [OB] alors la droite perpendiculaire à (OB) en A coupe Γ en N. AN $= \sqrt{q}$ car dans le triangle rectangle ONB on a $\mathrm{AN}^2 = \mathrm{OA} \times \mathrm{AB}$.
3. Soit E et I deux points de [OB] tels que OB = AN et tel OI=-p/2.
4. On trace ensuite le demi-cercle de diamètre [OE], il coupe l'arc de centre O et de rayon OE en T.
5. Le cercle de centre I passant par T coupe l'axe (OB) en deux points qui ont pour abscisses les solutions s_1 et s_2 de l'équation.

Preuve :
$\mathrm{OT}^2 = \mathrm{OE}^2$ Une solution n'existe que si $\mathrm{OT} \leq \mathrm{OI}$
$\mathrm{OI}^2 = \mathrm{OT}^2 + \mathrm{IT}^2$ càd $\mathrm{OI}^2 = q + \mathrm{IT}^2$ et comme $\mathrm{OI}^2 = \frac{p^2}{4}$ alors

$$\mathrm{IT}^2 = \frac{p^2}{4} - q \text{ et } \mathrm{IT} = \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Le point I ayant pour abscisse $\frac{-p}{2}$ on en déduit que s_1 et s_2 ont pour abscises respectives :

$$s_1 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ et } s_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Résolution de l'équation suivante avec $p < 0$ et $q < 0$:

$$x^2 - px + q = 0$$

1. On trace un segment BA tel que OA=1 et BO=q

2. On trace le demi-cercle Γ ayant comme diamètre [AB] alors la droite perpendiculaire à (OB) en O coupe Γ en T.
3. Soit I le point de (OB) tel que OI=-p/2.
4. Le cercle de centre I passant par T coupe l'axe (OB) en deux points qui ont pour abscisses les solutions S_1 et S_2 de l'équation.

Preuve :
$OT = \sqrt{-q}$ car dans le triangle rectangle ATB on a $OT^2 = OA \times OB$.
$OI^2 + OT^2 = IT^2$ càd $IT^2 = OI^2 - q$ et comme $OI^2 = \frac{p^2}{4}$ alors

$$IT^2 = \frac{p^2}{4} - q \text{ et } IT = \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

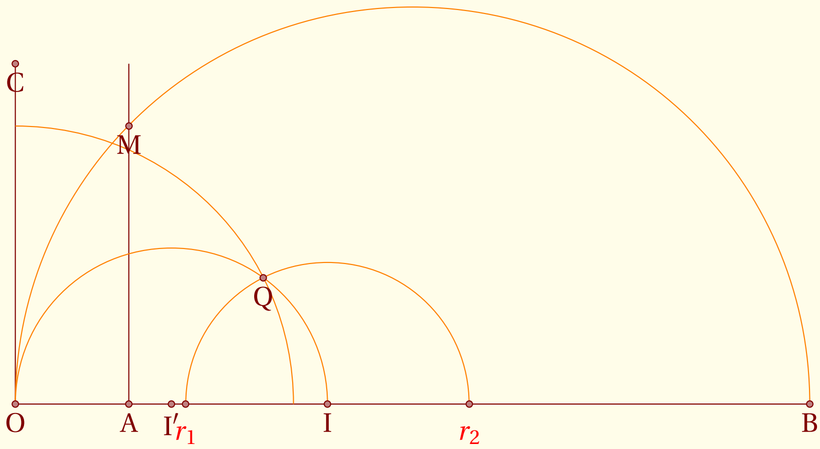
De plus

$$OT^2 = OS_1 \times OS_2 = -q$$

Le point I ayant pour abscisse $\frac{-p}{2}$ on en déduit que s_1 et s_2 ont pour abscisses respectives :

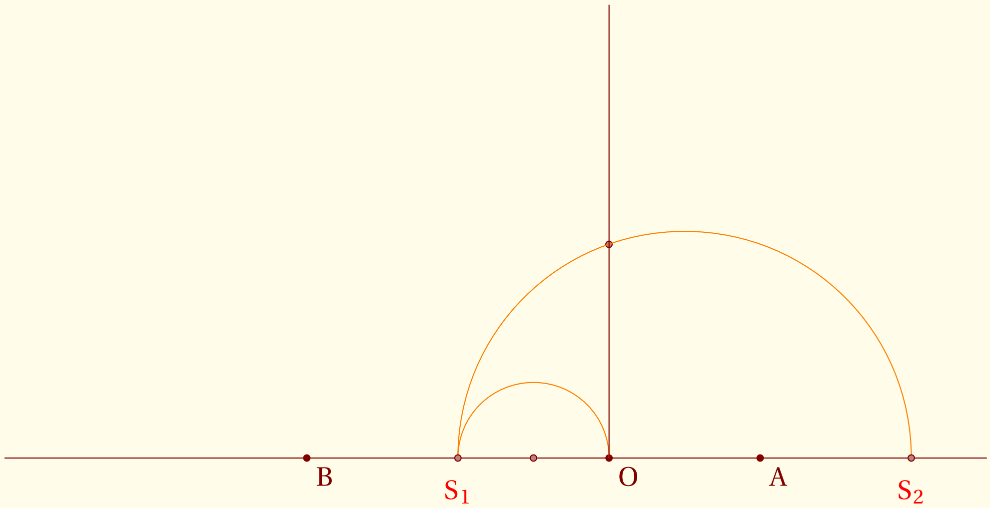
$$S_1 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ et } S_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Remarque : Soit s_1 et s_2 les abscisses des points S_1 et S_2 alors $s_1 + s_2 = p$ et $s_1 \times s_2 = q$ (somme et produit des racines).



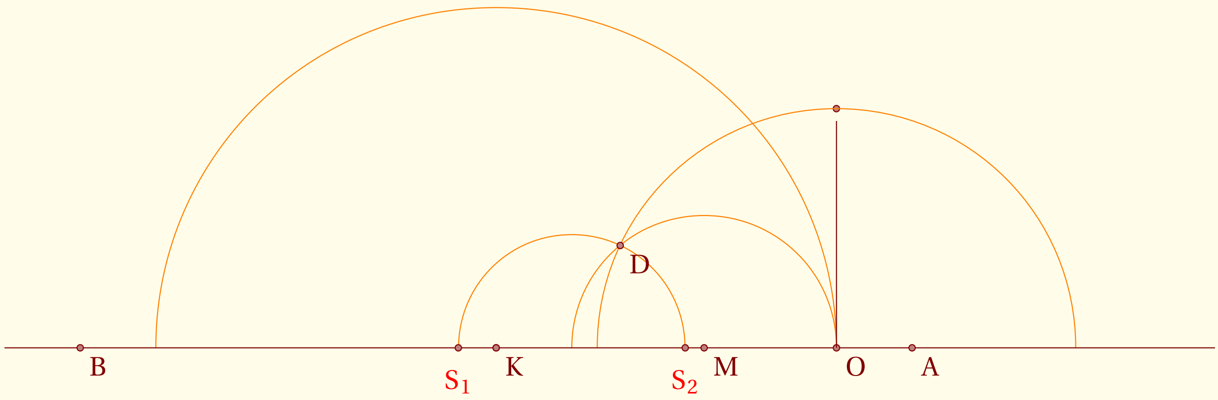

```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5]
\def\p{5.5} \def\q{6}
 \tkzInit[xmin=0,xmax=10,ymin=0,ymax=10]
 \tkzDefPoint(0,0){O}
 \tkzDefPoint(1,0){A}
 \tkzDefPoint(1,3){A'} % lineOrtho
 \tkzDefPoint(1+\q,0){B}
 \tkzDefPoint(0,3){C}
 \tkzDefPoint({(1+\q)/2},0){K}
 \tkzDefPoint(\p/2,0){I}
 \tkzDefMidPoint(O,I)\tkzGetPoint{I'}
 \tkzInterLC(A,A')(K,B)
 \tkzGetPoints{N}{M}
 \tkzInterCC[with nodes](O,A,M)(I',I',O)
 \tkzGetPoints{Q}{T}

 \tkzDrawSegments(A,A' O,B O,C)

 \tkzDrawArc(K,B)(O)
 \tkzCalcLength(A,M)
 \tkzDrawArc[R](O,\tkzLengthResult pt)(0,90)
 \tkzDrawArc[angles](I',O)(0,180)
 \tkzDrawArc[angles](I,T)(0,180)
 \tkzDrawPoints(O,A,B,C,Q,M,I,I')
 \tkzLabelPoints[below](O,A,B,C,Q,M,I,I')
 \tkzDefPoint(1.5,0){r_1}
 \tkzDefPoint(4,0){r_2}
 \tkzDrawPoints(r_1,r_2)
 \tkzLabelPoints[below=5pt,color=red](r_1,r_2)
\end{tikzpicture}
```

FIGURE 1: Résolution de $x^2 - \dfrac{11}{2}x + 6 = 0$.




```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
 \def\p{1}   \def\q{-2}
  \tkzInit[xmin=-4,xmax=5,ymin=-1,ymax=4] \tkzClip
  \tkzDefPoint(0,3){C}

  \tkzPoint(0,0){O}
  \tkzPoint(1,0){A}
  \tkzPoint(\q,0){B}

  \tkzDefPoint({(1+\q)/2},0){K}
  \tkzDefPoint(\p/2,0){I}

  \tkzInterLC(O,C)(K,B)\tkzGetPoints{T}{N}
  \tkzDrawLine[add= .5 and 1](A,B)

  \tkzDrawArc(K,O)(B)
  \tkzDrawPoints(K,T)
  \tkzDrawArc[angles](I,T)(0,180)
  \tkzDrawSegment(O,C)
     \tkzDefPoint(-1,0){S_1}
   \tkzDefPoint(2,0){S_2}
   \tkzDrawPoints(S_1,S_2)
    \tkzLabelPoints[below=5pt,color=red](S_1,S_2)
\end{tikzpicture}
```

FIGURE 2: Résolution de $x^2 - x - 2 = 0$.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
 \def\p{-7}  \def\q{-10}
   \tkzInit[xmin=-11,xmax=5,ymin=-1,ymax=6] \tkzClip
   \tkzDefPoint(0,0){O}
   \tkzDefPoint(1,0){A}
   \tkzDefPoint(\q,0){B}
   \tkzDefPoint({(1+\q)/2},0){K}
   \tkzDefPoint(0,3){C}
   \tkzDefPoint(\p/2,0){I}
   \tkzDefPoint(\p/4,0){M}
   \tkzInterLC(O,C)(K,B)\tkzGetPoints{T}{N}
   \tkzInterCC(O,T)(M,O)\tkzGetPoints{E}{D}

   \tkzDrawArc(K,O)(B)
   \tkzDrawPoints(K,T)
   \tkzDrawArc[angles](O,T)(0,180)
   \tkzDrawArc[angles](M,O)(0,180)
   \tkzDrawLine[add= .5 and 1](A,B)
   \tkzDrawArc[angles](I,D)(0,180)
   \tkzDrawPoints(D,O,A,B,K,M,N)
   \tkzLabelPoints(D,O,A,B,K,M,N)
   \tkzDrawSegment(O,C)
   \tkzDefPoint(-5,0){S_1}
   \tkzDefPoint(-2,0){S_2}
   \tkzDrawPoints(S_1,S_2)
    \tkzLabelPoints[below=5pt,color=red](S_1,S_2)
\end{tikzpicture}
```

FIGURE 3: Résolution de $x^2 + 7x + 10 = 0$.

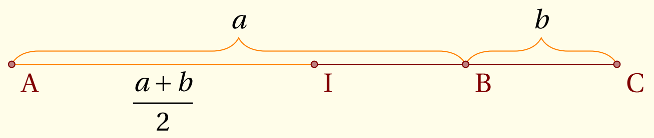
SECTION 6

Construction des moyennes

6.1 Moyenne arithmétique

Sur une droite (Δ) on place deux segments [AB] et [BC] de longueurs respectives a et b. I milieu de [AC] est tel que :

$$\mathrm{IA} = \mathrm{IC} = \frac{a+b}{2}$$




```
\begin{tikzpicture}
   \tkzInit[xmin = -1,ymin = -3,xmax = 9,ymax = 1]\tkzClip
  \tkzDefPoint(0,0){A} \tkzDefPoint(0,-1){A'}
  \tkzDefPoint(6,0){B} \tkzDefPoint(4,-1){I'}
  \tkzDefPoint(8,0){C}
  \tkzDefMidPoint(A,C)\tkzGetPoint{I}
  \tkzDrawSegment[decoration={brace,amplitude=10pt},
     decorate,color=orange](A,B)
  \tkzDrawSegment[decoration={brace,amplitude=10pt},
     decorate,color=orange](B,C)
   \tkzDrawSegment(A,C)
  \tkzDrawSegment[decoration={brace,amplitude=20pt},
      postaction={decorate},color=orange](I,A)
  \tkzDrawPoints(A,B,C,I)\tkzLabelPoints(A,B,C,I)
  \tkzLabelSegment[above=10pt](A,B){$a$}
  \tkzLabelSegment[above=10pt](B,C){$b$}
  \tkzLabelSegment[above](A',I'){$\dfrac{a+b}{2}$}
\end{tikzpicture}
```

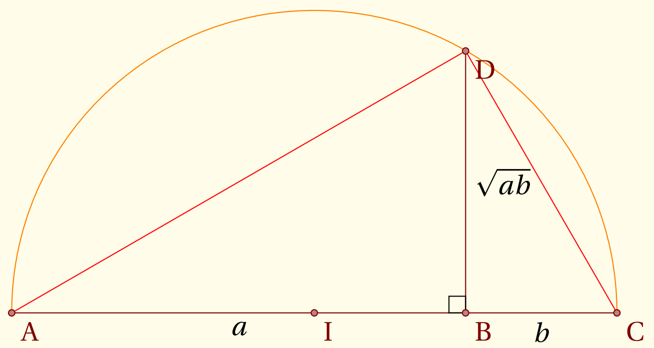
6.2 Moyenne géométrique

Sur une droite (Δ), on place deux segments [AB] et [BC] de longueurs respectives a et b. D est un point du cercle de diamètre [AC] tel que (BD) soit perpendiculaire à [AC] en B. ADC est un triangle rectangle en D ce qui implique que les triangles rectangles ADB et ACD sont semblables, ainsi

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} \text{ soit } \mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} = a \times b$$

Finalement

$$\mathrm{BD} = \sqrt{ab}$$




```
\begin{tikzpicture}
    \tkzInit[xmin = -1,ymin = -1,
             xmax = 11,ymax = 6]
    \tkzClip
    \tkzDefPoint(0,0){A}
    \tkzDefPoint(0,-1){A'}
    \tkzDefPoint(6,0){B}
    \tkzDefPoint(4,-1){I'}
    \tkzDefPoint(8,0){C}
    \tkzDefMidPoint(A,C)\tkzGetPoint{I}
    \tkzDrawArc(I,C)(A)
    \tkzDefPointWith[orthogonal](B,A)
    \tkzInterLC(B,tkzPointResult)(I,C)\tkzGetFirstPoint{D}
    \tkzDrawSegments(A,C B,D)
    \tkzDrawSegments[red](A,D C,D)
    \tkzMarkRightAngle(A,B,D)
    \tkzDrawPoints(A,B,C,D,I)
    \tkzLabelSegment[right](B,D){$\sqrt{ab}$}
    \tkzLabelPoints(A,B,C,D,I)
    \tkzLabelSegment[below](A,B){$a$}
    \tkzLabelSegment[below](B,C){$b$}
\end{tikzpicture}
```

6.3 Moyenne harmonique

Si

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

alors c est la moyenne harmonique de a et b.
La relation est aussi donnée sous la forme

$$c = \frac{2ab}{a+b}$$

Deux nombres a et b étant donnés, on note $\mathscr{A}$, $\mathscr{G}$, et $\mathscr{H}$ les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de ces deux nombres. Montrons alors que

$$\mathscr{G}^2 = \mathscr{H} \times \mathscr{A}$$

– a et b deux nombres tels que OA = a et AB = b. I est le centre du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OB]. [IK] est un rayon de ce cercle perpendiculaire à (OB). Alors IK = $\mathscr{A}$.
– (AG) est perpendiculaire à (OB) en A et G est un point de $\mathscr{C}$. OGB est un triangle rectangle tel que

$$\mathrm{AG}^2 = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$$

Finalement AG = $\mathscr{G} = \sqrt{ab}$
GAH et IAG sont des triangles rectangles semblables (voir la moyenne géométrique), on a donc :

$$\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{IH}} \text{ et } \frac{\mathrm{AG}}{\mathscr{G}} = \frac{\mathscr{G}}{\mathscr{A}}$$

puis

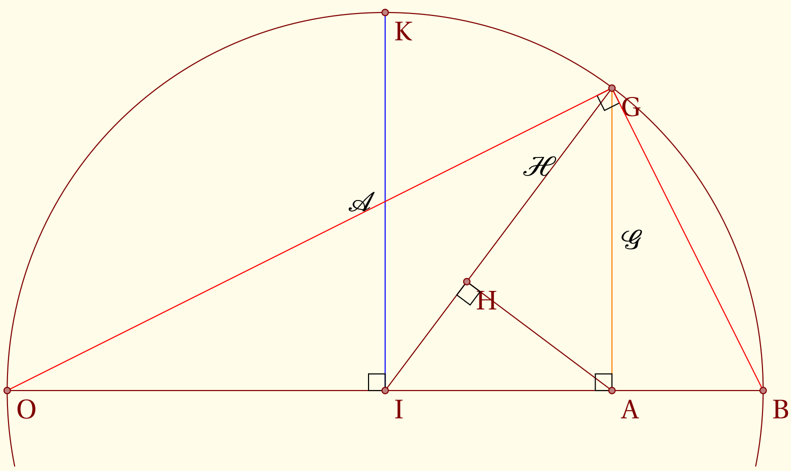
$$\mathscr{G}^2 = \mathscr{A} \times \mathrm{AG} \text{ and } \mathrm{AG} = \frac{\mathscr{G}^2}{\mathscr{A}}$$

On peut ainsi établir que AG = $\mathscr{H}$

$$\frac{1}{\mathscr{H}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathscr{G}^2} = \frac{a+b}{2ab}$$

Finalement

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}}$$

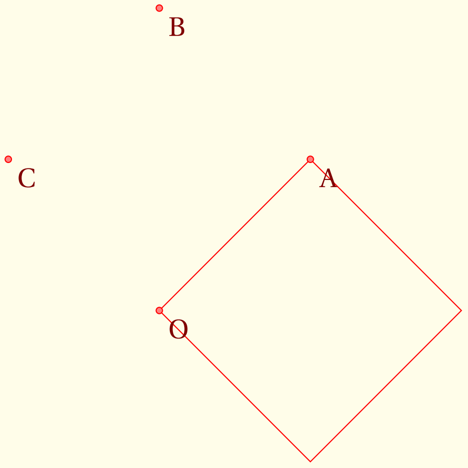


```
\begin{tikzpicture}
   \tkzInit[xmin = -1,ymin = -1,xmax = 11,ymax = 6]\tkzClip
   \tkzDefPoint(0,0){O}
   \tkzDefPoint(8,0){A}%
   \tkzDefPoint(10,0){B}
   \tkzDefPoint(5,0){I}
   \tkzDefPoint(5,5){K}

   \tkzDefLine[orthogonal=through A](O,B)%\tkzGetPoint{h}
   \tkzInterLCR(A,tkzPointResult)(I,5 cm){G}{G'}

   \tkzDefPointBy[projection=onto I--G](A)\tkzGetPoint{H}

   \tkzLabelPoints(O,A,B,G,K,H,I)
   \tkzDrawSegments(I,H A,H H,G O,B)
   \tkzDrawSegment[color = blue](I,K)
   \tkzDrawSegment[color = orange](A,G)
   \tkzDrawCircle[R](I,5 cm)
   \tkzMarkRightAngles(O,I,K O,A,G A,H,I O,G,B)
   \tkzDrawSegments[red](O,G G,B)
   \tkzDrawPoints(O,A,B,G,K,H,I)

   \tkzLabelSegment[left](I,K){$\mathcal{A}$}
   \tkzLabelSegment[right](A,G){$\mathcal{G}$}
   \tkzLabelSegment(H,G){$\mathcal{H}$}
\end{tikzpicture}
```

SECTION 7

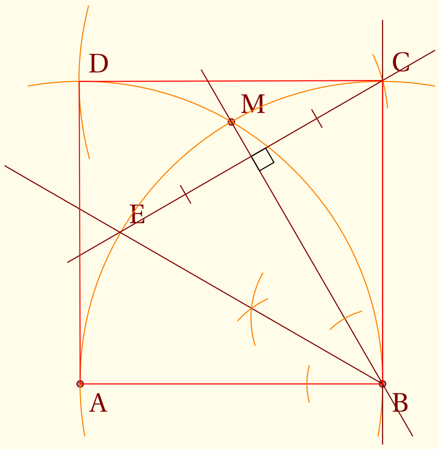
Construction d'un carré

7.1 Outil de tkz-euclide



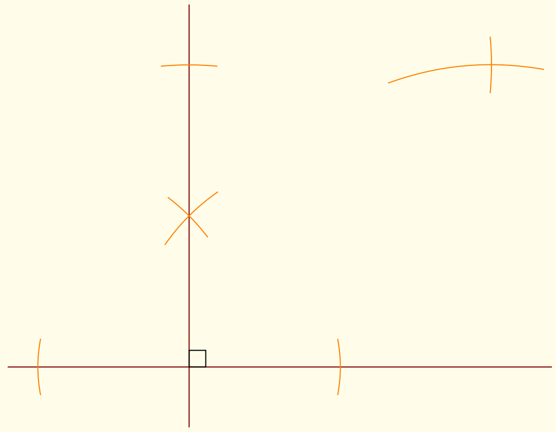

```
\begin{tikzpicture}
 \tkzDefPoint(0,0){O}
 \tkzDefPoint(2,2){A}
 \tkzDefSquare(O,A)\tkzGetPoints{B}{C}
 \tkzDrawSquare[color=red](A,O)
 \tkzDrawPoints[color=red](O,A,B,C)
 \tkzLabelPoints(O,A,B,C)
\end{tikzpicture}
```

7.2 Méthode 1 au compas



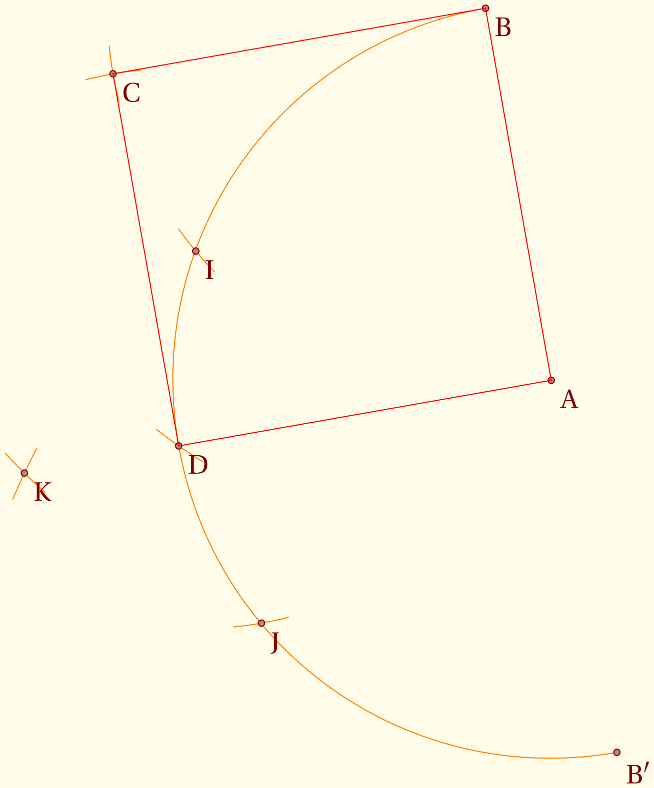

```
\begin{tikzpicture}
   \tkzInit[xmin=-1,xmax=5,ymin=-1,ymax=5]\tkzClip
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzDefPoint(4,0){B}
  \tkzDefEquilateral(A,B)     \tkzGetPoint{M}
  \tkzDefLine[bisector](M,B,A)\tkzGetPoint{b}
  \tkzInterLC(B,b)(B,A)       \tkzGetPoints{F}{E}
  \tkzDefPointBy[reflection=over B--M](E) \tkzGetPoint{C}
  \tkzInterLL(M,B)(C,E)    \tkzGetPoint{H}
  \tkzInterCC(C,B)(A,B)    \tkzGetPoints{K}{D}
  \tkzLabelPoints(A,B)
  \tkzLabelPoints[above right](M,E,C,D)
  \tkzDrawPoints(A,B,M)
  \tkzDrawArc[rotate,delta=10](A,B)(90)
  \tkzDrawArc[angles,delta=10](B,A)(90,180)
  \tkzDrawLine[add =0 and 5](B,b)
  \tkzDrawLine(B,M)
  \tkzCompass(M,C)
  \tkzDrawArc[angles,delta=10](C,B)(175,185)
  \tkzDrawLines(B,C E,C)
  \tkzDrawPolygon[color=red](A,B,C,D)
  \tkzMarkSegments[mark=|](E,H H,C)
  \tkzMarkRightAngle(B,H,C)
  \tkzShowLine[bisector](M,B,A)
\end{tikzpicture}
```

7.3 Méthode 2 au compas



```
\begin{tikzpicture}
   \tkzDefPoint(0,0){A}
   \tkzDefPoint(4,0){B}
   \tkzDrawLine[add= .6 and .2](A,B)
   \tkzCalcLength[cm](A,B)\tkzGetLength{dAB}
   \tkzDefLine[orthogonal=through A](A,B)\tkzGetPoint{h}
   \tkzDrawLine(A,h)
   \tkzMarkRightAngle(B,A,h)
   \tkzDefPointWith[orthogonal,K=-1](B,A)
   \tkzCompasss(A,h h,tkzPointResult)
   \tkzShowLine[orthogonal= through A,gap=2](A,B)
   \tkzDrawArc[R](B,\dAB)(80,110)
\end{tikzpicture}
```

7.4 Méthode avec le compas seulement



```
\begin{tikzpicture}
  \tkzDefPoint(0,0){A}
  \tkzGetRandPointOn[circle=center A radius 5 cm]{B}
  \tkzDefPointWith[linear,K=-1](A,B)\tkzGetPoint{B'}
  \tkzDrawArc(A,B)(B')
  \tkzInterCC[R](A,5 cm)(B,5 cm)  \tkzGetFirstPoint{I}
  \tkzInterCC[R](A,5 cm)(I,5 cm)  \tkzGetFirstPoint{J}
  \tkzInterCC(B,J)(B',I)        \tkzGetSecondPoint{K}
  \tkzInterCC[with nodes](A,B,A)(B,A,K)\tkzGetFirstPoint{D}
  \tkzInterCC(B,A)(D,A)\tkzGetSecondPoint{C}
  \tkzCompasss(B,I I,J B,K B',K B,D B,C D,C)
  \tkzDrawPoints(A,B,B',I,J,K,D,C)
  \tkzLabelPoints(A,B,B',I,J,K,D,C)
  \tkzDrawPolygon[color=red](A,B,C,D)
\end{tikzpicture}
```

SECTION 8

Pentagone régulier

Euclide construit un pentagone régulier (équilatéral et équiangle) inscrit dans un cercle. Son élément de base est le triangle d'or : un triangle isocèle dont les angles avec la base sont doubles de l'angle au sommet (et ainsi l'angle au sommet est le 5e de l'angle plat). 180/5=36

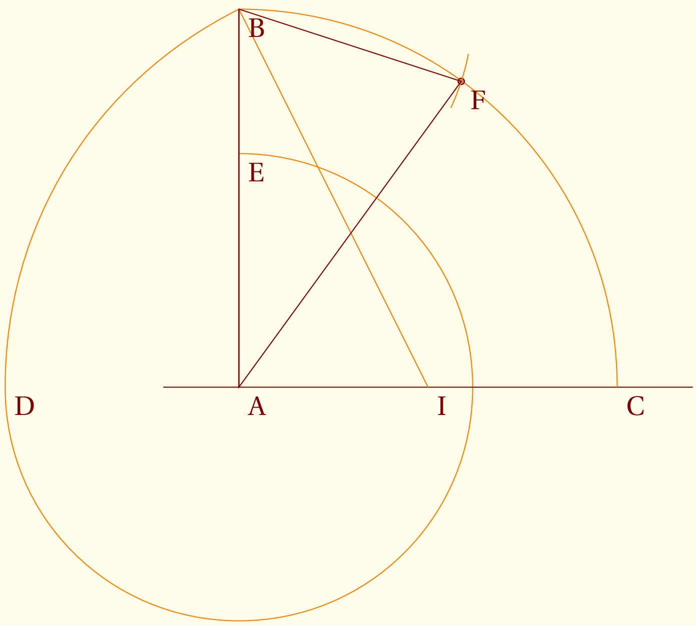
8.1 Construction du triangle d'or

Dans la figure jointe, I est le milieu de [AC], AC = AB, IB = ID, AD = AE = BF. Euclide démontre que le triangle ABF est un triangle d'or en utilisant des propriétés assez longues. (wikipedia)
De nos jours, la démonstration est plus simple car si on note AC = 1, on obtient

$$\mathrm{IB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AE} = \mathrm{BF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

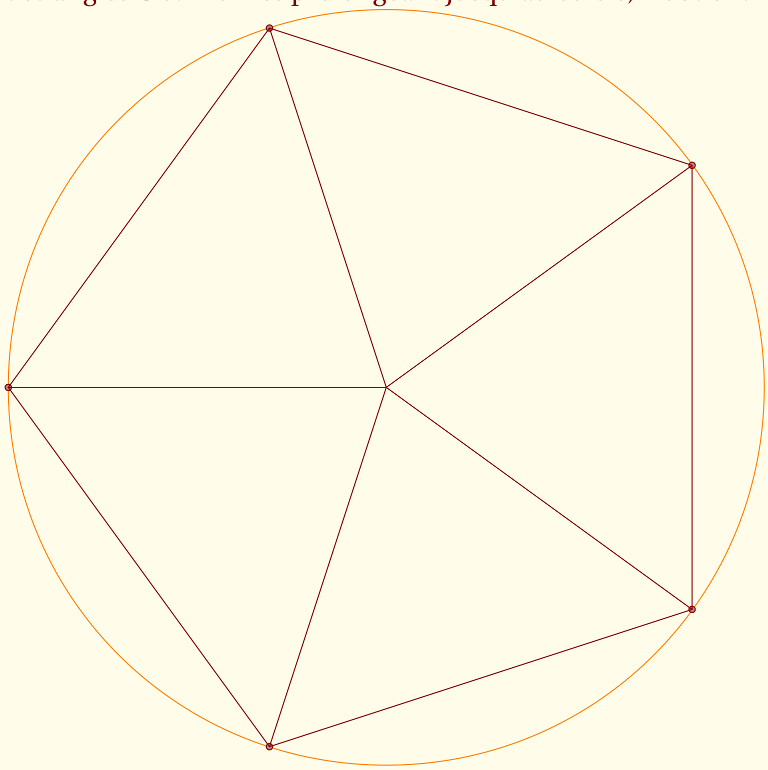
grâce au théorème de Pythagore où $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est le nombre d'or. Les dimensions du triangle ABF sont donc 1 ; 1 et $\frac{1}{\Phi}$. C'est bien un triangle d'or.



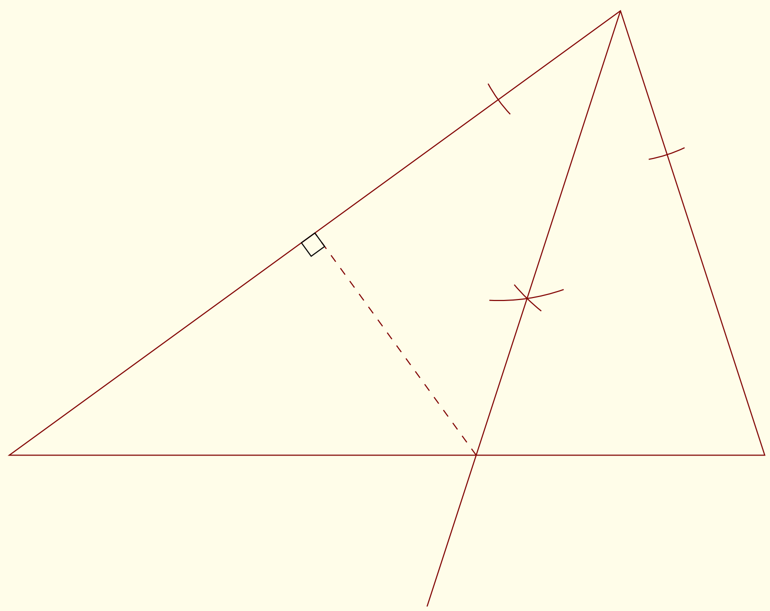

```
\begin{tikzpicture}
 \tkzDefPoint(0,0){A}
 \tkzDefPoint(5,0){C}
 \tkzDefPoint(0,5){B}

 \tkzDefMidPoint(A,C)\tkzGetPoint{I}
 \tkzDuplicateLen(I,B)(I,A)\tkzGetPoint{D}
 \tkzDuplicateLen(A,D)(A,B)\tkzGetPoint{E}
 \tkzInterCC[with nodes](A,A,C)(B,A,E)
 \tkzGetSecondPoint{F}

 \tkzDrawArc[color=orange](I,B)(D)
 \tkzDrawArc[color=orange](A,D)(E)
 \tkzDrawLine(A,C)
 \tkzDrawSegment(A,B)
 \tkzDrawArc(A,C)(B)
 \tkzDrawPoint(F)
 \tkzDrawSegment[color=orange](I,B)
 \tkzCompass(B,F)
 \tkzDrawPolygon[color=Maroon](A,B,F)
 \tkzLabelPoints(A,B,C,D,I,E,F)
\end{tikzpicture}
```

8.2 Construction du pentagone

Euclide prouve qu'il peut construire un triangle d'or dans un cercle. À partir du triangle d'or OA'C construire le triangle d'or CDA grâce à l'arc de cercle de centre A' et de rayon A'C. En prenant les bissectrices des angles C et D en les prolongeant jusqu'au cercle, il obtient les deux sommets B et E manquant.



8.3 Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$



```
\begin{tikzpicture}
    \tkzInit[xmin=-1,xmax=11,ymin=-1,ymax=6]
    \tkzClip[space=1]
    \tkzDefPoint(0,0){B}
    \tkzDefPoint(10,0){C}
    \tkzDefPointBy[rotation= center B angle 36](C)
    \tkzGetPoint{A}
    \tkzDefLine[bisector](B,A,C)\tkzGetPoint{a}
    \tkzInterLL(B,C)(A,a)\tkzGetPoint{I}
    \tkzDefPointBy[projection= onto B--A](I)\tkzGetPoint{H}

    \tkzShowLine[bisector,color=Maroon,size=2,gap=4](B,A,C)
    \tkzDrawLine[color=Maroon,add= 0 and 6](A,a)
    \tkzDrawPolygon[color=Maroon](A,B,C)
    \tkzDrawSegment[color=Maroon,style=dashed](I,H)
    \tkzMarkRightAngle(B,H,I)
\end{tikzpicture}
```

Soit un triangle d'or ABC ayant pour base

* BA=BC
* $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{5}$
* [AI) bissectrice de $\widehat{BAC}$
* $AC = 1$

On montre alors que :

* $AC = AI = BI = 1$
* $BA = 2BH = 2\cos(\frac{\pi}{5})$
* $IC = 2\cos(\frac{\pi}{5}) - 1$
* $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{IC}{AC}$ donc $IC = \dfrac{1}{2\cos(\frac{\pi}{5})}$

Les deux dernières égalités donnent $(2\cos(\frac{\pi}{5})(2\cos(\frac{\pi}{5}) - 1) = 1$ c'est à dire

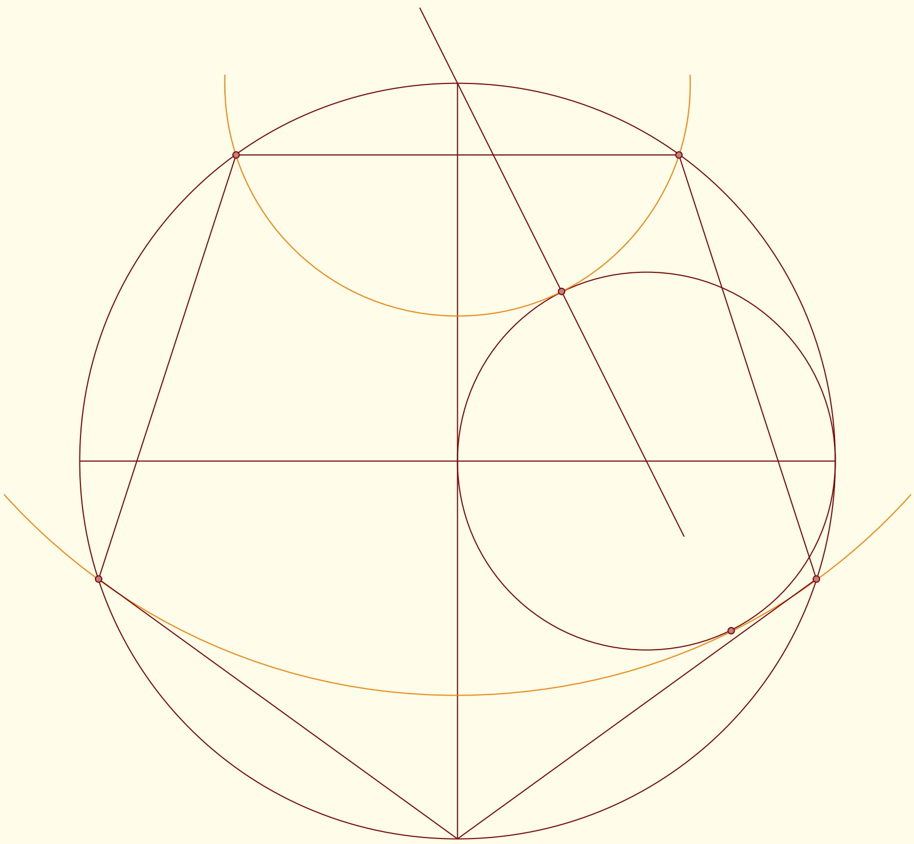
$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

Si on pose $\cos\left(\frac{\pi}{5}\pi\right) = x$ la solution positive de l' équation $4x^2 - 2x + 1 = 0$ donne
$\cos\left(\frac{\pi}{5}\pi\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$.

8.4 Pentagone inscrit dans un cercle

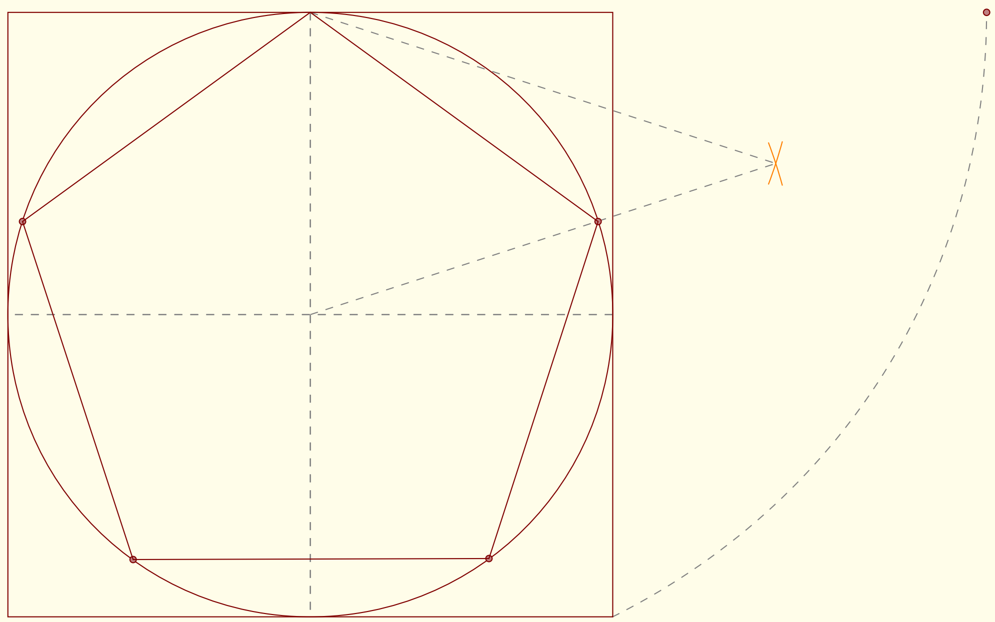
On peut grandement simplifier la construction d'Euclide en conservant le même principe : construire des triangles d'or ou d'argent.

1. Tracer un cercle Γ de centre O et de rayon R (unité quelconque)
2. Tracer 2 diamètres perpendiculaires
   - les jonctions à Γ formant les point A, B, C, D
   - A étant diamétralement opposé à C
   - B étant diamétralement opposé à D
   - Tracer un cercle Γ′ de diamètre [OA] (rayon R' = R/2) et de centre I. cercle Γ′ passe donc en O et A.
     Tracer une droite (d) passant par B et I.
     (d) intercepte cercle Γ′ en E et F (E est le plus proche de B). Tracer 2 (arc de) cercles Γ1 et Γ2 de centre B et de rayons (respectivement) BE et BF.
     Γ1 et Γ2 interceptent Γ en 4 pts (D1, D2, D3, D4) D, D1, D2, D3, D4 forment un pentagone régulier.
     En effet, on vérifie que BOD2 est un triangle d'or, BOD1 un triangle d'argent (leurs bases valent respectivement et alors que leurs côtés valent R).



```
\begin{tikzpicture}[scale=1]
  \tkzInit[xmin=-6,xmax=6,ymin=-6,ymax=6]
  \tkzClip
  \tkzDefPoint(0,0){O}
  \tkzDefPoint(-5,0){C}
  \tkzDefPoint(5,0){A}
  \tkzDefPoint(0,-5){D}
  \tkzDefPoint(0,5){B}

  \tkzDefMidPoint(A,O)\tkzGetPoint{I}
  \tkzInterLC(I,B)(I,A)\tkzGetPoints{F}{E}
  \tkzInterCC(O,C)(B,E)\tkzGetPoints{D3}{D2}
  \tkzInterCC(O,C)(B,F)\tkzGetPoints{D4}{D1}

  \tkzDrawSegments(B,D C,A)
  \tkzDrawLine(B,I)
  \tkzDrawCircle(O,A)
  \tkzDrawCircle[diameter](O,A)
  \tkzDrawArc[delta=20](B,D3)(D2)
  \tkzDrawArc[delta=20](B,D4)(D1)
  \tkzDrawPolygon(D,D1,D2,D3,D4)
  \tkzDrawPoints(E,F,D1,D2,D4,D3)
\end{tikzpicture}
```

8.5 Pentagone inscrit dans un cercle inscrit dans un carré.

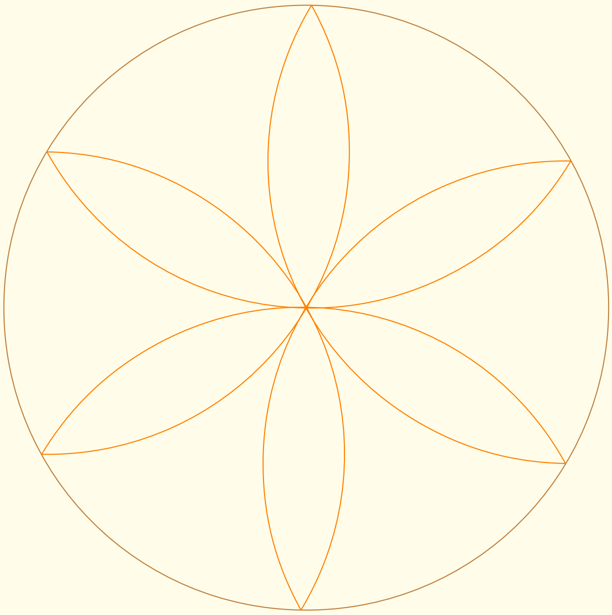


```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
    \tkzInit[xmin=-6,xmax=12,ymin=-6,ymax=6]
    \tkzClip
    \tkzDefPoint(-5,-5){A}                \tkzDefPoint(0,0){O}
    \tkzDefPoint(+5,-5){B}
    \tkzDefPoint(+5,+5){C}
    \tkzDefPoint(-5,+5){D}                \tkzDefPoint(0,-5){F}
    \tkzDefPoint(+5,0){F'}                \tkzDefPoint(0,+5){E}
    \tkzDefPoint(-5,0){K}
    \tkzInterLC(D,C)(E,B)                 \tkzGetPoints{T'}{T}
    \tkzDefMidPoint(D,T)                  \tkzGetPoint{I}
    \tkzInterCC[with nodes](O,D,I)(E,D,I) \tkzGetPoints{H'}{H}
    \tkzInterLC(O,H)(O,E)                 \tkzGetPoints{M'}{M}
    \tkzInterCC(O,E)(E,M)                 \tkzGetPoints{Q}{M}
    \tkzInterCC[with nodes](O,O,E)(Q,E,M) \tkzGetPoints{P}{E}
    \tkzInterCC[with nodes](O,O,E)(P,E,M) \tkzGetPoints{N}{Q}
    \tkzDrawCircle(O,E)
    \tkzDrawSegments[color=gray,style=dashed](E,F F',K)
    \tkzCompasss(O,H E,H)
    \tkzDrawSegments[color=gray,style=dashed](E,F F',K O,H E,H)
    \tkzDrawArc[color=gray,style=dashed](E,B)(T)
    \tkzDrawPoints(T,M,Q,P,N)
    \tkzDrawPolygon[color=Maroon](M,E,Q,P,N)
    \tkzDrawPolygon(A,B,C,D)
\end{tikzpicture}
```

SECTION 9

La rosace

Soit deux points sur feuille. Réaliser un cercle de centre le premier point et passant par le second. Réaliser un triangle équilatéral ayant pour base le rayon. Recommencer l'opération avec le centre et le nouveau point etc. jusqu'à obtenir un hexagone régulier.

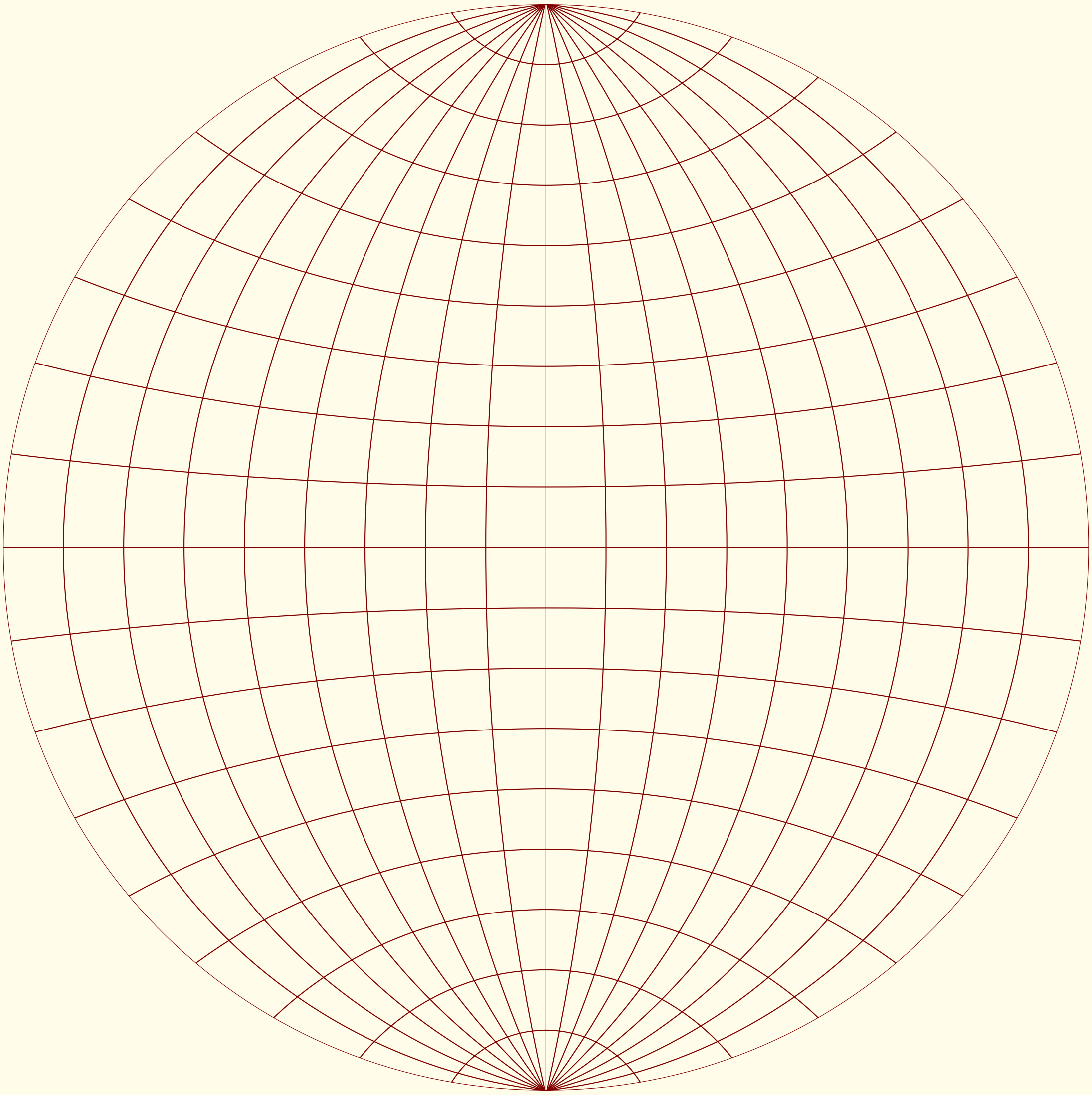


```
\begin{center}
  \begin{tikzpicture}[scale=.8]
    \tkzDefPoint(0,0){O}
    \tkzDrawCircle[R,color=brown](O,5 cm)
    \tkzGetRandPointOn[circle=center O radius 5 cm]{p0}
    \foreach \i/\j/\k in {0/1/5,
                          1/2/0,
                          2/3/1,
                          3/4/2}{%
    \tkzInterCC(O,p0)(p\i,O)\tkzGetPoints{p\j}{p\k}%
    }
    % on peut alléger la syntaxe avec pgf CVS
    \foreach \i/\j/\k in {0/1/5,
                          1/2/0,
                          2/3/1,
                          3/4/2,
                          4/5/3,
                          5/0/4}{%
      \tkzDrawArc[color=orange](p\i,p\j)(p\k)}
    \end{tikzpicture}
\end{center}
```

SECTION 10

Une mappemonde

Ceci est une mappemonde :



```
\begin{tikzpicture}[scale=.8]
  \tkzInit[xmin=-10,xmax=10,ymin=-10,ymax=10]
  \tkzDefPoint(0 , 0){O}
  \tkzDefPoint(9 , 0){A}
  \tkzDefPoint(-9, 0){C}
  \tkzDefPoint(0 , 9){B}
  \tkzDefPoint(0 ,-9){D}
  \tkzClipCircle(O,A)
  \foreach \pti in {1,2,...,8}{
  \tkzDefPoint(10*\pti:9){P\pti}
  \tkzDefPoint(90:\pti){MP\pti}
  \tkzDefPoint(0: \pti){NP\pti}
  \tkzDefLine[mediator](MP\pti,P\pti)
  \tkzInterLL(B,D)(tkzFirstPointResult,tkzSecondPointResult)
  \tkzDrawCircle[color=Maroon](tkzPointResult,P\pti)
  }
  \foreach \pti in {-1,-2,...,-8}{
  \tkzDefPoint(10*\pti:9){P\pti}
  \tkzDefPoint(-90:-\pti){MP\pti}
  \tkzDefPoint(0: -\pti){NP\pti}
  \tkzDefLine[mediator](MP\pti,P\pti)
  \tkzInterLL(B,D)(tkzFirstPointResult,tkzSecondPointResult)
  \tkzDrawCircle[color=Maroon](tkzPointResult,P\pti)
  }
  \foreach \pti in {1,2,...,8}{
  \tkzDefLine[mediator](B,NP\pti)
  \tkzInterLL(A,C)(tkzFirstPointResult,tkzSecondPointResult)
  \tkzDrawCircle[color=Maroon](tkzPointResult,NP\pti)
  }
  \foreach \pti in {1,2,...,8}{
  \tkzDefPoint(0: -\pti){NP\pti}
  \tkzDefLine[mediator](B,NP\pti)
  \tkzInterLL(A,C)(tkzFirstPointResult,tkzSecondPointResult)
  \tkzDrawCircle[color=Maroon](tkzPointResult,NP\pti)
  }
  \tkzDrawCircle[R,color=Maroon](O,9 cm)
  \tkzDrawSegments[color=Maroon](A,C B,D)
\end{tikzpicture}
```